Modul: Algebra
Del 4: Interaktion i algebraklassrummet

Nästa tal i en aritmetisk talföljd

Cecilia Kilhamn, Göteborgs Universitet, Anna-Lena Ekdahl, Högskolan i Jönköping, Jörgen Fors Linnéuniversitetet

Mönster är en viktig del av algebran. Genom aktiviteter där eleverna får upptäcka, konstruera och beskriva mönster utvecklas deras förmåga att se likheter och skillnader, förändring, ordning och struktur i matematik. Målet är att eleverna även ska utveckla sin förmåga att uttrycka sig mer generellt.

I den här delen av modulen arbetar vi med aritmetiska talföljder, det vill säga talföljder med en konstant skillnad mellan talen. Exempel på aritmetiska talföljder är:

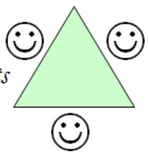
3, 6, 9, 12, 15…	skillnaden är 3
0, 4, 8, 12, 16…	skillnaden är 4
1, 4, 7, 10, 13…	skillnaden är 3
9, 18, 27, 36, 45…	skillnaden är 9
2, 7, 12, 17, 22…	skillnaden är 5
99, 88, 77, 66, 55…	skillnaden är 11

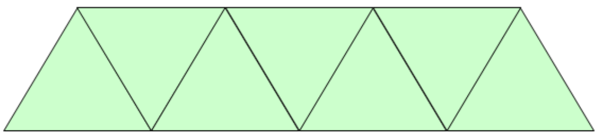
Långbordet – ett klassrumsexempel

I matematiken är det ofta en fördel att arbeta med flera olika representationer och uttrycksformer. Om eleven utgår från ett mönster som kan illustreras med konkret material får eleven en bild. Bilden kan översättas till en tabell som i sin tur kan översättas till en talföljd, och med hjälp av bilden, tabellen, talföljden och eventuellt konkret material kan eleven föra samtal om strukturen i mönstret. Ett exempel på en rik mönsteruppgift är *långbordet*:

Långbordet

Vi gör ett långbord av triangel-formade bord så som bilderna visar. På varje fri sida kan det sitta en person. Hur många personer får plats på långbordet?





Den första frågan som ställs är hur många fler platser det blir för varje nytt bord?

Vi tar del av hur ett lärarlag arbetat för att utveckla en lektion om mönster i årskurs 2-3. De använde just den här uppgiften. I den första lektionen arbetade de systematiskt och frågade eleverna hur många platser det blir om man har 1 bord, 2 bord, 3 bord osv. De förde också in resultatet i en tabell. Medan eleverna lade upp trianglar, ritade och räknade, observerade lärarna hur de gick tillväga. Lärarna upptäckte olika sätt att räkna.

1) Eleven bygger först ett långbord med 2 trianglar och räknar runt. Eleven bygger sedan ett nytt långbord med 3 trianglar och räknar runt. Samma procedur för varje långbord.
2) Eleven bygger först ett långbord med 2 trianglar och räknar runt. Sedan lägger eleven till en triangel och adderar antalet *nya* platser.

Elever som räknade runt hela vägen tappade ofta bort vilken sida de hade börjat räkna på. Elever som adderade för varje nytt bord, adderade ofta 3 (för att det var trianglar) eller 2 (för att det blev 2 nya kanter). Eftersom två kanter tillkommer men en försvinner blir det i realiteten bara en ny plats på varje nytt bord.

Efter den första lektionen trodde lärarna att alla elever var överens om hur många platser det var vid varje långbord i de första 5 figurerna och de flesta elever kunde se att man skulle lägga till en plats varje gång man la till ett nytt bord. Alla kunde se att talföljden 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9… hela tiden ökar med 1. Men ingen kunde uttrycka något generellt samband mellan antal platser och antal bord så när läraren frågade hur många platser som behövdes för 100 bord hade de inget svar.

I sitt andra försök arbetade lärarna på ett helt annat sätt. I början av lektionen diskuterades olika sätt som eleverna räknade platserna i långbordet med 7 trianglar. Sedan lät man eleverna parvis arbeta med att ta reda på hur många platser som behövdes för olika långbord, ofta med ganska många trianglar. Varje par fick alltså en lapp där det framgick hur många trianglar de hade i sitt långbord. De fick också en ny fråga:

- Vad ser du för mönster?
- Beskriv på ett enkelt sätt hur man kan veta hur många platser det blir?

När de var klara fick eleverna jämföra med varandra, kontrollera varandras resultat och diskutera *hur de kunde veta* att de kommit fram till rätt antal. I slutet av den lektionen hade alla elever insett att det blev en extra plats för varje nytt bord och att det skulle adderas två platser.

Antal bord	**Antal platser**
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7

Om du analyserar de två lektionerna om långbord med trianglar ser du att den första lektionen fokuserade på skillnaden mellan talen i talföljden 3, 4, 5, 6, 7… och kom fram till den generella regeln *lägga till 1*. Detta gjordes genom en systematisk variation av antal bord och en tydligt uppskriven tabell.

Den andra lektionen fokuserade istället på sambandet mellan antal bord och antal platser och kom fram till regeln att *antal platser är lika med antal bord plus 2*. Detta gjordes dels genom att först lyfta fram en variation av elevers olika sätt att räkna, dels genom en slumpmässig variation av antal trianglar i långborden. Denna slumpmässiga variation bidrog till att talföljden kom i bakgrunden och sambandet mellan antal bord och antal platser lättare kunde uppmärksammas.

Båda reglerna är generella påståenden. Skillnaden är att den första regeln bara hjälper oss att beräkna nästa tal i följden medan den andra hjälper oss att beräkna vilket tal som helst i följden. Det är alltså två olika kvaliteter av förståelse av talföljden.

I skolans tidigare år behöver eleverna ges möjlighet till att utveckla sin förmåga på den perceptiva och verbala nivån. Studien visar hur elever gör när de upptäcker och försöker förstå ett mönster och hur eleverna utnyttjar hela kroppen med gester, mimik, ord och ritningar. Det blir alltså lättare för elever att se ett mönster om man tar vara på och uppmärksammar hela deras repertoar av uttryckssätt. Genom att låta eleverna berätta och skriva ner vad de ser får eleverna möjlighet att utveckla sin verbala förmåga.

Klassrumsexempel – tänkbara kritiska aspekter

För att se strukturen i till exempel talföljden 2, 7, 12, 17, 22… behöver eleverna upptäcka både **talen** i talföljden och **skillnaden mellan** talen i talföljden (här är skillnaden 5).

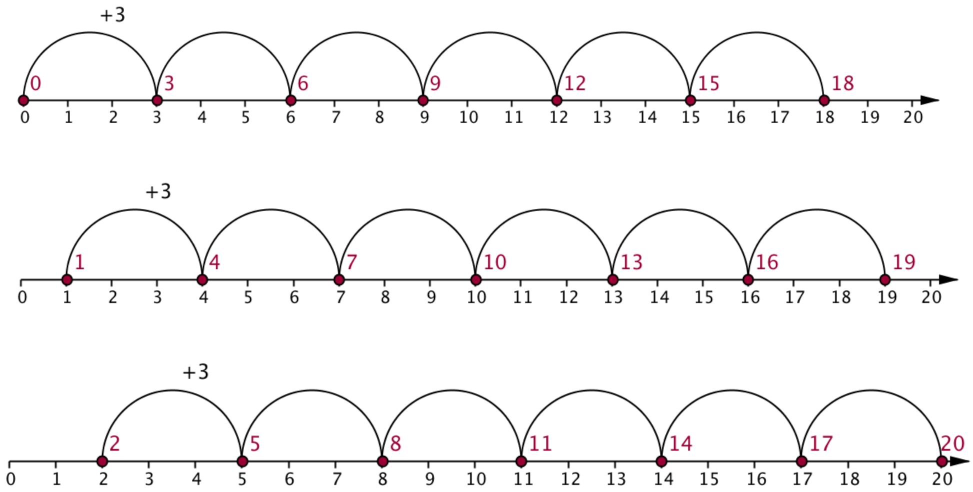
Se vilket mönster det handlar om

Vad som är kritiskt för en elev som ska utveckla sin förmåga att kunna beskriva hur man får fram nästa tal i en aritmetisk talföljd, beror självklart på vad eleven redan kan. Utifrån forskning om elever som arbetar med mönster i matematiken är det nödvändigt att eleverna ser vilket mönster det handlar om (perceptiv nivå). Detta handlar om vad i den perceptiva nivån som man kan synliggöra genom att lyfta fram det elever ser. Eleverna kommer att skapa en variation, till exempel att de pekar och ritar på olika sätt när de räknar platser runt långbordet, eller hur de lägger eller ritar tändstickor i ett mönster. I samtal om en talföljd med endast tal, kan man få fram olika iakttagelser. I talföljden 2, 7, 12, 17, 22… skulle en elev kunna se att:

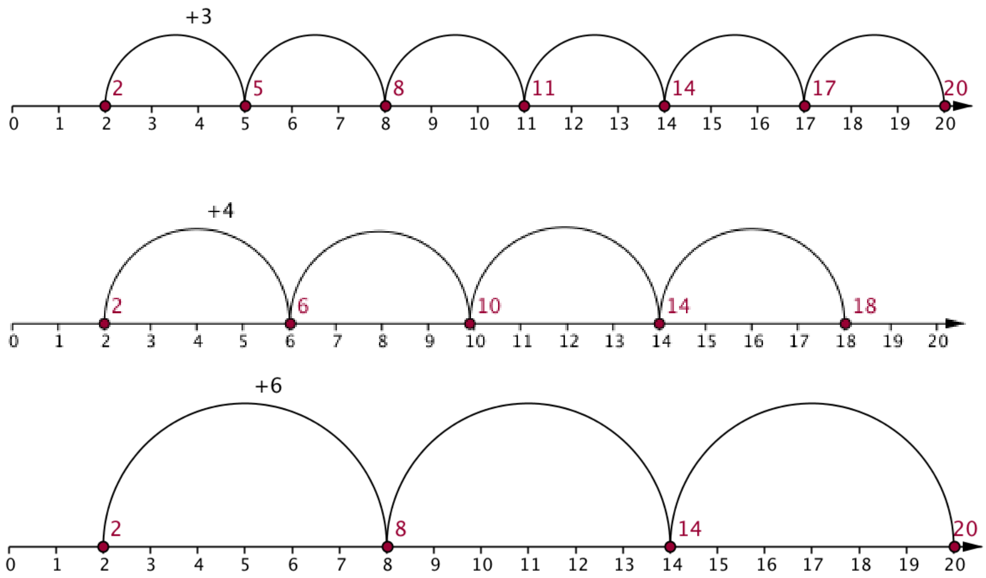
- vartannat tal slutar på 2 och vartannat på 7
- vartannat tal är jämnt
- skillnaden är 10 mellan till exempel 2 och 12
- skillnaden mellan varje tal är 5
- man får nästa tal i följden genom att ta plus 5
- talföljden börjar på 2
- …

Se talen och skillnaden mellan talen i talföljden

En annan del av innehållet som handlar om talföljder och som är viktig att eleverna förstår är att eleverna ska se skillnaden mellan talen i talföljden. Du kan synliggöra detta i undervisning genom att exempelvis representera *talföljder på parallella tallinjer*. Rita då upp flera parallella tallinjer. Markera en talföljd på varje tallinje genom att dels markera talen, dels skillnaden mellan talen i form av bågar (hopp) på tallinjen. I bilden nedan illustreras dels tre talföljder som alla har samma skillnad (+3) men som börjar på olika tal, dels tre talföljder som börjar på samma tal (2) men har lika skillnader.



Tre talföljder med skillnaden 3:
0, 3, 6, 9, 12, 15, 18…
1, 4, 7, 10, 13, 16, 19…
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20…



Tre talföljder med olika skillnad men samma begynnelsetal:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20…
2, 6, 10, 14, 18…
2, 8, 14, 20…

Låt eleverna till slut fundera på vad det kan bero på att vissa av talen finns med i flera av talföljderna!