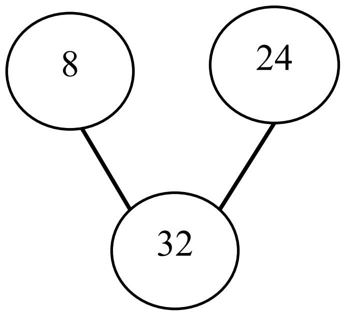
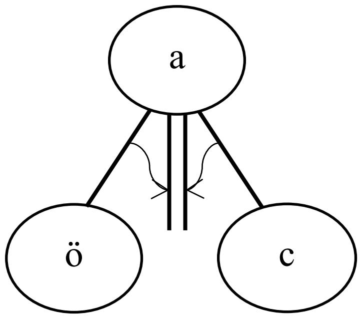


Figur 12. Delarna “faller ned” och bildar helheten.

I Figur 12 visualiseras relationer mellan alla tal i del-helhetsstrukturen på samma sätt som i Figur 3. Eleven vände upp och ned på modellen som även fortsättningsvis visualiserade strukturen.

Ett annat exempel från årskurs 3 där elever utforskade tal i ekvationer genom att ompröva modellens design, är en elev som uttryckte likheten med modellens sneda streck – ’benen’ som förbinder helheten med delarna – och ett likhetstecken (Figur 13).



Figur 13. De två linjerna i modellen liknades vid ett likhetstecken.

Eleven beskrev att $ö$ och c skulle kunna vara tal där talens värden tillsammans bildar ett tredje värde, a, (se Excerpt 3).

lärandeverksamhet (Davydov, 1986/2008). Att äldre elever fokuserade på regler i stället för relationer kan ses som en indikation på att en matematikundervisning utifrån relationer bör introduceras redan för de allra yngsta eleverna. Under forskningslektionerna fanns det även äldre elever som urskiljde relationer mellan talen trots att de mött regler i tidigare undervisning och vid de tillfällena kom modellen att få funktionen av en lärandemodell.

Under forskningslektionerna prövades endast aritmetiska ekvationer (se Filloy & Rojano, 1989). Om den specifikt strukturella modellen ska användas för icke-aritmetiska ekvationer kan begränsningar uppkomma angående dess funktion som ett medierande redskap för att urskilja strukturer i ekvationer eller för att finna värdet på det obekanta talet. En reflektion vi gör är att relationerna mellan talen då inte kan begränsas till en 'ren' del-helhetsstruktur.

Matthews och Fuchs (2020) betonar vikten av att utveckla förståelse för likhetstecknets innebörd och användning i stället för att endast se tecknet som en "från vänster till höger-signal". McAuliffe med flera (2020) framhåller att förståelse för likhetstecknet krävs för att lyckas med matematik oavsett nivå. I ett teoretiskt arbete med modellen som stöd kan förståelse för likhetstecknets innebörd och användning utvecklas. Detta synliggjordes under forskningslektionerna när en elev i årskurs 3 lyfte fram relationer mellan tal samt likhetstecknets funktion som en symbol för ekvivalens mellan värdet på delarna tillsammans och helheten (Figur 13, Excerpt 3). I exemplet satte eleven även ord på hur modellens design hjälpte till att visualisera den matematiska strukturen.

Modeller kan även ha möjlighet att visualisera strukturer utan ord med kvantiteter som sträckor eller areor, vilket kan vara en fördel som lyfts fram i tidigare forskning (t.ex. Mellone & Ramploud, 2015; Polotskaia, 2017; Schmittau, 2011). En begränsning, som vi ser det, med modeller uppbyggda av kvantiteter är att de endast är applicerbara på naturliga tal. Inför forskningslektionerna designades därför en modell med möjlighet att appliceras på ett expanderat talområde omfattande alla heltal och som visualiserar en del-helhetsstruktur. Med stöd av den specifikt strukturella modellen skapades ett meningsskapande sammanhang under de gemensamma resonemangen om matematiska strukturer (Davydov, 1986/2008). Ett exempel på när ett meningsskapande sammanhang kom till uttryck var när eleverna i årskurs 3 analyserade ekvationen $3 + x = 2$ holistiskt, argumenterade för relationerna mellan talen, omformulerade ekvationen på fyra olika sätt för att därefter välja en för dem enklare operation och avslutningsvis lösa ut det obekanta talet. Eleverna hade aldrig tidigare opererat med negativa tal och i linje med vad Kieran (1990) framhåller behöver elevers intuitiva metoder utmanas, vilket tycktes gynnsamt i exemplet från årskurs 3. Detta är en indikation på ett teoretiskt arbete där modellen fick funktionen av en lärandemodell (Davydov, 1986/2008). Även de äldre eleverna behövde utmanas med mer komplicerade ekvationer för att de inte bara skulle 'veta svaret' och för att ett meningsskapande sammanhang skulle iscensättas.

Oavsett årskurs kom modellen att användas som stöd för det teoretiska arbetet på ett relativt likartat sätt. Det kan bero på att upplägget av forskningslektioner utgjorde ett, för eleverna, helt nytt sätt att utforska ekvationer – att urskilja relationer mellan *alla* tal i ekvationer – inte att i första hand prestera ett korrekt svar.

I en learning study är avsikten att skapa så goda förutsättningar som möjligt för elevernas lärande (Carlgren m.fl., 2017). Varje elev deltog i endast *en* forskningslektion, vilket kan ses som en begränsning för den enskilde elevens lärande. De iterativa processerna möjliggjorde dock för forskargruppen att dra lärdom mellan forskningslektionerna under revideringen inför nästkommande lektion.

En slutsats som vi drar är att elever inledningsvis i arbetet med ekvationer behöver försättas i situationer och utmanas med ”krångliga” ekvationer som skapar behov av att analysera strukturen i stället för att enbart fokusera på att finna rätt svar (se även Tuominen m.fl., 2021).

Resultatet som beskrivs i denna artikel är ett komplement till tidigare forskning avseende modellers design för att bemästra ekvationer. Bidraget är modellens potential att visualisera en del-helhetsstruktur även när negativa tal är inkluderade i ekvationer.

Ett förslag på fortsatt forskning kan vara att pröva modellens funktion för icke-aritmetiska ekvationer. Avslutningsvis menar vi att en lärandemodell kan vara till stöd och nyttjas som en 'brygga' för elever att urskilja relationer mellan *alla* tal i ekvationer. Så småningom är avsikten att elever ska bemästra ekvationer utifrån analys och att lärandemodellen ska internaliseras och blir ett tankeredskap.

Tack

Tack till våra medforskande lärare och Vetenskapsrådet för möjliggörande av studien. Tack även till professor Lisa Björklund Boistrup och professor Inger Eriksson för stöd under skrivarbetet.

Referenser

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal, 93*(4), 373–397. https://doi.org/10.1086/461730

Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Whitacre, I., & Schappelle, B. P. (2014). Using order to reason about negative numbers: the case of Violet. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(1), 39–59. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9519-x

Blanton, M., & Kaput, J. J. (2001). Algebraifying the elementary mathematics experience part II: Transforming practice on a district-wide scale. I H. Chik, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Red.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference. The future of the teaching and learning of algebra* (s. 87–95). University of Melbourne.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Murphy Gardiner, A., Isler, I., & Kim, J. (2015). The development of children's algebraic thinking: the impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1) 39–87. https://www.jstor.org/stable/pdf/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Brown, C., Carpenter, T., Kouba, V., Lindquist, M., Silver, E., & Swafford, J. (1988). *Secondary school results from the fourth NAEP mathematics assessment: Algebra, geometry, mathematical methods, and attitudes*. *Mathematics Teacher*, *81*(5), 337–347, 397. https://doi.org/10.5951/MT.81.5.0337

Bryman, A. (2018). *Samhällsvetenskapliga metoder* (2:a uppl.) (B. Nilsson övers.). Liber. (Originalutgåvan publicerad 2002)

Cai, K., & Knuth, E. (Red.), (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Carlgren, I. (2012). The learning study as an approach for "clinical" subject matter didactic research. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 1*(2), 126–139. https://doi.org/10.1108/20468251211224172

Carlgren, I. Eriksson, I., & Runesson, U. (2017). Learning study. I I. Carlgren (Red.), *Undervisningsutvecklande forskning – exemplet learning study* (s. 17–39). Gleerups.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. I T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Red.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (s. 9–24). Lawrence Erlbaum. https://doi.org/10.4324/9781003046585

Davydov, V. V. (1990). Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. (J. Teller övers.). *Soviet Studies in Mathematics Education, 2*, 2–222. NCTM. (Originalutgåvan publicerad 1972)

Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction. A theoretical and experimental psychological study*. Nova Science. (Originalutgåvan publicerad 1986) https://ebookcentral-proquest-com.ezp.sub.su.se/lib/sub/detail.action?docID=3021729

Eriksson, H., & Eriksson, I. (2020). Learning actions indicating algebraic thinking in multilingual classrooms. *Educationals Studies in Mathematics*, 106, 363–378. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10007-y

Eriksson, I. (2017). Lärandeverksamhet som redskap i en Learning study. I I. Carlgren (Red.), *Undervisningsutvecklande forskning - exemplet Learning study* (s. 61–81). Gleerups.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19–25. https://www.jstor.org/stable/40247950

Gorbov, S. F., & Chudinova, E. V. (2000). The effect of modeling on the students' learning (Regarding problem formulation). *Psykologisk Vetenskap och Utbildning* [*Psychological Science and Education*], *2*, 96–110.

Hemmi, K., Bråting, K., & Lepik, M. (2021). Curricular approaches to algebra in Estonia, Finland and Sweden – a comparative study. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(1), 49–71. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1740857

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317–326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. I P. Nesher & J. Kilpatrick (Red.), *ICMI study series. Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 96–112). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139013499.007

Kieran, C. (2018). *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice*. Springer. https://www.springer.com/gp/book/9783319683508

Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers*. (Doktorsavhandling). Göteborgs universitet: Institutionen för didaktik och pedagogisk profession. https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/24151?locale=sv

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Red.), (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Research Council. National Academy Press. https://doi.orf/10.17226/9822

Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Nationellt centrum för matematikutbildning.

Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned. Professional insights gained and shared by teachers of mathematics*. (Doktorsavhandling). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis. https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/22180?locale=sv

Llinares, S., & Roig, A. I. (2005). Secondary school students' construction and use of mathematical models in solving word problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *6*, 505–532. https://doi.org/10.1007/s10763-006-9055-6

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2012). *Developing thinking in algebra*. SAGE Publications Ltd. (Originalet publicerat 2005)

Matthews, P. G., & Fuchs, L. S. (2020). Keys to the gate? Equal sign knowledge at second grade predicts fourth-grade algebra competence. *Child Development*, *91*(1), e14–e28. 10.1111/cdev.13144

McAuliffe, S., Tambara, C., & Simsek, E. (2020). Young students' understanding of mathematical equivalence across different schools in South Africa. *South African Journal of Childhood Education*, *10*(1) a 807. https://doi.org/10.4102/sajce.v10i1.807

Mellone, M., & Ramploud, A. (2015). Additive structure: An educational experience of cultural transposition. I X. Sun, B. Kaur, & J. Novotná. (Red.), *Proceedings of the ICMI Study 23*, 567–574. University of Macau. http://dx.doi.org/10.1142/978-99965-1-066-3

Polotskaia, E. (2014). *How elementary students learn to mathematically analyze word problems: The case of addition and subtraction*. McGill University. 10.13140/RG.2.1.3525.3289

Polotskaia, E. (2017). How the relational paradigm can transform the teaching and learning of mathematics: Experiment in Quebec. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *18*(2), 161–180.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. I C. Kieran (Red.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (s. 3–25). Springer. https://www.springer.com/gp/book/9783319683508

Röj-Lindberg, A.-S., & Partanen, A.-M. (2019). Learning to solve equations in three Swedish-speaking classrooms in Finland. I C. Kilhamn, & R. Säljö (Red.), *Encountering algebra. A comparative study of classrooms in Finland, Norway, Sweden and the USA* (s. 111–138). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-17577-1_6

Schmittau, J. (2011). The role of theoretical analysis in developing algebraic thinking: A Vygotskian perspective. I J. Cai, & E. Knuth (Red.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (s. 71–85). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_5

Schubring, G. (2005). *Conflicts between generalization, rigor and intuition. Number concepts underlying the development of analysis in 17-19th century France and Germany*. Springer. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F0-387-28273-4.pdf

Sherman, J., & Bisanz, J. (2009). Equivalence in symbolic and nonsymbolic contexts: Benefit of solving problems with manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, *101*(1), 85–100. http://dx.doi.org/10.1037/a0013156

Skolverket (2020). *TIMSS 2019. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Internationella studier 2020:8. https://www.skolverket.se/getFile?file=7592

Tuominen, J., Andersson, C., & Boistrup, L. B. (2021). Critical aspects of equations when explored as a part-whole structure. *Proceedings of MADIF 12. The twelfth research seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education* (s. 223–233). Linnéuniversitetet. http://matematikdidaktik.org/wp-content/uploads/2021/03/MADIF12_dokumentation.pdf

Tuominen, J., Andersson, C., & Boistrup, L. B., & Eriksson, I. (2018). Relate before calculate: Students' experiences of relationships of quantities. *Didactica Mathematicae*, *40*, 51–79. https://wydawnictwa.ptm.org.pl/index.php/didactica-mathematicae/issue/view/426

van Oers, B. (2001). Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 59–85. https://doi.org/10.1023/A:1014031507535

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. I T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Red.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (s. 39–59). Lawrence Erlbaum. 10.1201/9781003046585-4

Wettergren, S., Eriksson, I., & Tambour, T. (2021). Yngre elevers uppfattningar av det matematiska i algebraiska uttryck. *LUMAT General Issue*, *9*, 1–28. https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1377