En modell som stöd för att utforska ekvationer

Charlotta Andersson och Jane Tuominen

Institutionen för ämnesdidaktik, Stockholms universitet, Sverige

Syftet med artikeln är att lyfta fram om, och i sådant fall på vilka sätt, en specifik strukturell modell kan utgöra stöd när elever utforskar matematiska strukturer i ekvationer. Artikeln bygger på en empirisk forskningsstudie där elever utforskade matematiska strukturer med stöd av modellen, vilken är avsedd att visualisera strukturer. Lärare och forskare arbetade i en kollaborativ och intervenerande studie i iterativa processer. Sammantaget 149 elever från grundskolans årskurser 3, 8 och 9 deltog i filmade forskningslektioner utifrån forskningsansatsen learning study. Lektionerna designades med inspiration från ramverket lärandeverksamhet och eleverna utmanades i ett teoretiskt arbete. Analysen utfördes utifrån tematisk ansats och två kvalitativt skilda kärnteman identifierades: *Formulär* respektive *Lärandemodell*. I analysen framträdde att undervisningen behöver vara tillräckligt utmanande för att eleverna ska finna modellen meningsfull. Undervisningen behöver möjliggöra för eleverna att urskilja relationer mellan alla tal i en ekvation, där relationerna kan beskrivas som en del-helhetsstruktur.

Nyckelord: lärandemodell, del-helhetsstruktur, lärandeverksamhet, tematisk analys, ekvationer

ARTIKEL

LUMAT General Issue
Vol 10 No 1 (2022), 182–209

Mottagen 12 maj 2021
Accepterad 3 maj 2022
Publicerad 16 maj 2022

Sidor: 28
Referenser: 45

Kontakt:
charlotta.andersson@pedagogdirekt.se

https://doi.org/10.31129/LUMAT.10.1.1581

1 Introduktion

Att utforma en undervisning som möjliggör för elever att utforska ekvationer är, och tycks ha varit, en utmaning (Kieran, 1981; Röj-Lindberg & Partanen, 2019).[1] Trots tidigare forskning angående undervisning i algebra där ekvationer ingår kvarstår utmaningar i praktiken, vilket exempelvis kan avläsas i resultat från internationella mätningar som TIMSS (Skolverket, 2020). När dessutom subtraktion ingår i ekvationer kan det uppfattas som än mer utmanande, vilket bekräftas av forskning genomförd i olika länder som exempelvis USA (Ball, 1993) och Sverige (t.ex. Kilhamn, 2011; Kullberg, 2010). När något eller flera av talen i ekvationer antar ett negativt värde tillkommer aspekter som kan utgöra ytterligare utmaningar. I artikeln lyfts ekvationer med addition och subtraktion fram, det vill säga, ekvationer med en additiv struktur (se Vergnaud, 1982). Artikeln omfattar aritmetiska ekvationer med en operation mellan två tal i det ena ledet och summan eller differensen i det andra ledet av typen $Ax + B = C$ (se Filloy & Rojano, 1989).

[1] I denna artikel definieras ”ekvation” som en likhet där en eller flera obekanta tal förekommer (jfr Kiselman & Mouwitz, 2008).

Att empiriskt utforska negativa tal, som areor eller volymer, är inte helt okomplicerat (Schubring, 2005). En ytterligare utmaning med ekvationer med negativa tal är att summan kan anta ett lägre värde än addenderna eller att differensen kan anta ett högre värde än minuenden (Bishop m.fl., 2014), vilket också beskrivs som en kritisk aspekt av Tuominen med flera (2021).

Enligt Mason med flera (2005/2012) kan procedurer som inte fokuserar förståelse för, och insikt i, den bakomliggande matematiska idén utgöra ett hinder när elever senare möter ekvationer som inte ligger i linje med på vilket sätt en metod ska användas. Ett exempel är ekvationen $x - (-4) = 14$, där elever ’flyttar över’ ’rätt’ tal, men inte förstår teckenbytet korrekt. Ytterligare exempel på en procedur som kan användas utan förståelse är när regeln *minus och minus är plus* används i samband med negativa tal. Regeln gäller inte när två minustecken förekommer i ekvationer av typen $-4 - x = 14$, vilket, om regeln trots det tillämpas, kan leda till en felaktig omformulering som $x + 4 = 14$ (Kilhamn, 2011).

Att förstå likhetstecknets innebörd och användning är en viktig grund inför fortsatt arbete med algebra (Matthews & Fuchs, 2020; McAuliffe m.fl., 2020). Elever som inte förstår likhetstecknet uppfattar det exempelvis som en ’från vänster till höger-signal’ för att få ett svar som ’blir’. Eleverna har då ännu inte urskilt likhetstecknet som en symbol för ekvivalens mellan det vänstra och högra ledet på var sida om tecknet (Kieran, 1990; Kilpatrick m.fl., 2001). Ekvationer som $\_\_ = 8 + 4$ kan i sådana fall utgöra en utmaning och likaså ekvationer som $8 + 4 = \_\_ + 5$ där vanliga felaktiga lösningar är 12 eller 17.

Utöver nämnda problem kan det vara svårt för elever att urskilja en del-helhetsstruktur, särskilt när negativa tal är inkluderade. Davydov (1986/2008) argumenterar för att elever behöver använda modeller, så kallade lärandemodeller, för att utforska strukturella aspekter. En lärandemodel kan göra det möjligt för elever att arbeta teoretiskt, det vill säga utforska och resonera kring relationer mellan tal i ekvationer. Eriksson och Eriksson (2020) lyfter fram att en lärandemodell kan vara ett stöd under det teoretiska arbetet och möjliggör utveckling av ett teoretiskt tänkande, exempelvis för att analysera och synliggöra relationer mellan kvantiteter och detta kan även förstås som *algebraiskt tänkande*.

Utifrån tidigare forskning, nämnd ovan, finns ett behov av empirisk forskning som tar sig an frågan på vilka sätt elever kan tillägna sig en förståelse för de strukturella aspekterna i ekvationer. I denna artikel redogörs för en undervisningsutvecklande studie organiserad kring ett antal forskningslektioner. Under forskningslektionerna fick eleverna i uppgift att utforska strukturen i ekvationer. En specifik strukturell modell introducerades som ett tankeredskap och intentionen var att den abstrakta del-helhetsstrukturen skulle visualiseras. Modellen inspirerades av Davydovs curriculum (Davydov, 1986/2008).

1.1 Syfte och frågeställningar

Syftet med artikeln är att lyfta fram om, och i sådant fall på vilka sätt, en specifik strukturell modell kan utgöra stöd när elever utforskar matematiska strukturer i ekvationer. Frågeställningen för denna artikel är: På vilka sätt använder elever en specifik strukturell modell för att utforska ekvationer?

2 Tidigare forskning om algebraiskt tänkande

I grundskolans tidiga år är det vanligt att matematikundervisningen utgår från vad van Oers (2001) beskriver som en *aritmetisk undervisningstradition* där numeriska värden fokuseras och beräknas för att finna 'rätt svar' på en uppgift, exempelvis att lösa ut det obekanta talet i en ekvation. En sådan undervisning riskerar att elever inte ges möjlighet att utveckla det som ovan beskrivs som algebraiskt tänkande.

Blanton och Kaput (2001) påpekar att aritmetiken kan "algebraiseras", vilket innebär att matematiska strukturer, som relationer mellan alla tal i ekvationer, fokuseras (Cai & Knuth, 2011; Kieran, 2018; Radford, 2018). Hemmi med flera (2021) lyfter också fram vikten av att eleverna får resonera kring strukturer framför att beräkna uppgifter. Detta kan leda till att elever urskiljer relationer mellan tal, även inom aritmetik.

2.1 Struktur och relationer

I en ekvation finns flera relationer och strukturer, exempelvis en del-helhetsstruktur. Med utgångspunkt i en del-helhetsstruktur kan relationer mellan tal uttryckas som att två delar bildar en helhet, alternativt att en helhet bildas av eller delas upp i två delar (Carpenter & Moser, 1982; Polotskaia, 2017). Exempelvis beskriver ekvationerna $x - (-4) = 14$ respektive $-4 + 14 = x$ samma struktur där talet x utgör en helhet och talen (-4) och 14 är delar. Polotskaia (2014, s. 17) uttrycker detta som "it is important to think about three quantities connected by an additive relationship – one structure made up of three elements." Elementen kan utgöras av såväl kvantiteter (se Tuominen m.fl., 2018) som tal. När elever urskiljer relationer mellan alla tal i en ekvation kan de genom resonemang omformulera den ursprungliga ekvationen till en ekvivalent ekvation som inbjuder till en mer ’lätthanterlig’ operation (Polotskaia, 2014; 2017). Polotskaia (2014) framhåller styrkan med att fokusera det relationella för att utforska operationer:

> In the Relational Paradigm, the ”operation inversion” looks different. The additive relationship is a system of three elements where each element can be found using the two others. The total is the sum of two parts, and a part is the difference between the total and the other part. We therefore do not speak about the inversion of an operation, but about deriving an operation from the additive relationship. (s. 16)

I en analys av relationer mellan talen i ekvationen $x - (-4) = 14$ kan ekvationen omformuleras som en addition, $-4 + 14 = x$, för att erhålla det obekanta talet x. Blanton med flera (2015) lyfter fram vikten av att elever urskiljer räknesättens inversa förhållande för att resonera om strukturen i ekvationer. Ytterligare betonar Blanton med flera vikten av att utveckla förståelse för den relationella innebörden av likhetstecknet. Eftersom en och samma struktur kan formuleras på flera olika sätt är det oviktigt för elevers utforskande om det är helheten eller en av delarna som utgör det obekanta talet.

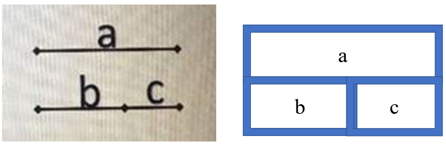
Wettergren med flera (2021) fann kritiska aspekter som elever behöver urskilja för att utveckla ett mer kvalificerat kunnande avseende vad som kan vara det generella i algebraiska uttryck, bland annat att värdet på en variabel i ett uttryck bestäms relationellt. Hemmi med flera (2021) benämner undervisning med fokus på strukturer och relationer som *generaliserad aritmetik*.

2.2 Modeller

Modeller förekommer i matematikundervisningen och än idag refereras till Bruners tre olika representationer från 1960-talet: det fysiskt manipulativa (det enaktiva), en bild som liknar det som ska representeras (det ikoniska) samt tecken eller symboler för att representera det aktuella (det symboliska) (Mason m.fl., 2005/2012). Llinares och Roig (2005) beskriver att när matematiska modeller används kan elever bearbeta den aktuella matematiken och förklara den baserat på situationer som exempelvis relationer, mönster eller operationer. Llinares och Roig skriver vidare fram att modeller kan fylla en funktion när elever behöver identifiera variabler samt relationer mellan dem för att överblicka och kommunicera om den matematiska situationen.

När elever med stöd av en modell urskiljer matematiska egenskaper som inte är direkt synliga, exempelvis ekvationers del-helhetsstruktur, kan som nämnts ovan en modell få funktionen som en lärandemodell (Davydov, 1986/2008; Gorbov & Chudinova, 2000). En lärandemodell kan även ha funktionen som kommunikativt redskap för att kollektivt utforska ett objekt (Davydov, 1986/2008; Gorbov & Chudinova, 2000).

Att empiriskt utforska relationer mellan tal i en del-helhetsstruktur med konkret materiel kan innebära utmaningar eftersom helheten inte längre är synlig när en del tas bort från helheten. Det förekommer modeller som illustrerar helhet och delar simultant, där helheten och delarna är representerade med kvantiteter, exempelvis sträckor eller areor i olika varianter (Figur 1) (Mellone & Ramploud, 2015).



Figur 1. Exempel på modeller som illustrerar delar och helhet.

Modellerna i Figur 1 visualiserar delar och helhet simultant, men kan vara svåra att använda när negativa tal är inkluderade eftersom en negativ sträcka eller area kan vara komplicerade att gestalta (Schubring, 2005). Andra modeller visar del-helhetsstruktur utan kvantiteter, där talen eller symboler för talen, tecknas i modellernas positioner. Sådana modeller kan även användas när negativa tal är inkluderade och därmed utgöra ett stöd för att visualisera att en helhet kan anta ett lägre värde än dess delar. Nedan visas två av dessa modeller:

Figur 2. Exempel på modeller utan kvantiteter, till vänster utifrån Vergnaud (1982) och till höger utifrån Davydov (1986/2008).

Vergnauds modell (1982) (Figur 2, vänster) tecknar två delar som tillsammans blir en helhet. Davydovs modell (1986/2008) (Figur 2, höger) visualiserar att de två delarna bildar en helhet respektive att en helhet är uppdelad i två delar. Helhetens uppdelning i delar framgår inte lika tydligt av Vergnauds modell, vilken kan tolkas dynamisk där någonting *blir* och delarna tillsammans blir helheten. Davydovs modell kan tolkas statisk där någonting *är* lika och delarna tillsammans är värda lika mycket som helheten. Davydovs modell har prövats och lyfts fram av andra forskare avseende del-helhetsstrukturen (t.ex. Mellone & Ramploud, 2015; Schmittau, 2011), dock endast med naturliga tal.

3 Teoretiska överväganden

Ett alternativ till att empiriskt utforska ekvationer med negativa tal är genom ett *teoretiskt arbete* (Davydov, 1990, 1986/2008), vilket prövades under forskningslektionerna som ligger till grund för föreliggande artikel. Eriksson (2017) beskriver ett teoretiskt arbete med stöd av modeller som att ”modeller används som medierande redskap för att eleverna genom att arbeta med dem ska få tillgång till ett teoretiskt kunskapsinnehåll” (s. 69). Det teoretiska kunskapsinnehållet i artikeln kan fastställas till relationer mellan *alla* tal i en ekvation. I avsikt att visualisera den abstrakta del-helhetsstrukturen och relationer mellan tal i ekvationer, användes en specifik strukturell modell designad utifrån Davydovs modell i Figur 2 ovan. Utifrån det teoretiska ramverket lärandeverksamhet har *matematiska strukturer* och *lärandemodeller* samt *teoretiskt arbete* en framträdande roll (Davydov, 1990, 1986/2008). I ett teoretiskt arbete behöver eleverna utmanas av läraren för att deras idéer ska kunna prövas och omprövas. Inom lärandeverksamhet uttrycks detta som att läraren skapar *motsättningar* (Davydov, 1986/2008; Eriksson, 2017. Under forskningslektionerna utgjorde negativa tal en planerad motsättning. Exempelvis antog helheten ett lägre värde än delarna, vilket kan utmana den uppfattning som Bishop med flera (2014) framhåller som dominerande.

4 Metod

Den empiriska studien, vilken ligger till grund för artikeln, genomfördes med learning study som forskningsansats (Carlgren, 2012). En forskargrupp, vilken utgjordes av åtta medforskande lärare och oss två forskare, arbetade intervenerande för att kollaborativt utveckla kunskaper. Forskargruppen arbetade i iterativa processer där forskningslektioner planerades, genomfördes och reviderades inför påföljande forskningslektion (se Carlgren m.fl., 2017; Marton, 2015). Avsikten var att systematiskt undersöka på vilka sätt en specifik strukturell modell kan användas för att utforska strukturer i ekvationer. Totalt genomfördes nio forskningslektioner á 45–60 minuter i årskurserna 3, 8 och 9. Valet av årskurser grundades på våra, forskarnas, tidigare bakgrund som lärare i årskurserna 1-3 respektive 7-9. I årskurs 3 deltog 45 elever från två olika klasser från en och samma skola, i årskurs 8 deltog 64 elever från två olika skolor och i årskurs 9 deltog 40 elever från två olika skolor. Eleverna i årskurs 3 kände varandra väl och delades in i tre likartat blandade grupper utifrån resultat på ett förtest. Eleverna i årskurserna 8 och 9 deltog i sina ordinarie klasser. Varje enskild elev deltog i *en* forskningslektion och 'nya' elever deltog i påföljande iteration. Varje forskningslektion genomfördes med olika lärare med motivet att fördela uppdraget jämlikt i forskargruppen. Forskningslektionerna observerades och filmades med en filmkamera på stativ placerad längst bak i klassrummet, riktad mot whiteboardtavlan och läraren. Ljudupptagningen från filmkameran kompletterades med diktafoner. När eleverna arbetade i grupper var det elevernas händer och arbeten som filmades. De lärare som inte undervisade var placerade på olika platser i klassrummet för att observera, anteckna och fotografera utan att störa lektionen.

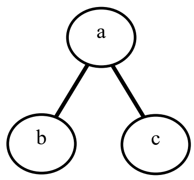
Urvalet av elever skedde genom ett direkt och målorienterat urval (Bryman, 2002/2018) i avsikt att eleverna inte tidigare skulle ha mött en undervisning utifrån matematiska strukturer. Eleverna som deltog i studien var enligt deras lärare vana sedan tidigare undervisning att i huvudsak fokusera på att finna ekvationers korrekta lösningar. Eleverna i årskurserna 8 och 9 hade tidigare mött regler som 'minus och minus är plus' samt 'flytta över och byt tecken'. Eleverna var således inte vana att utforska ekvationer utifrån matematiska strukturer som relationer mellan tal i ekvationer eller som en del-helhetsstruktur. Eleverna i årskurs 3 hade inte mött formell undervisning om ekvationer med bokstavssymboler eller operationer med negativa tal, men de hade mött enklare ekvationer där de obekanta talen var ersatta med ett understreck eller en ruta att fylla i, som exempelvis 5 + _ = 8. Ingen av eleverna, oavsett årskurs, hade tidigare mött den modell som användes under forskningslektionerna.

Mycket av elevernas utforskande arbete genomfördes i form av helklassdiskussioner där läraren ställde uppföljande och utmanande frågor baserat på elevernas resonemang. Oftast var det läraren som dokumenterade olika lösningar på en whiteboardtavla. Eleverna arbetade även i grupper om två till fyra elever i respektive grupp.

De filmade forskningslektionerna transkriberades ord för ord. Datamaterialet utgjordes även av kartläggningar i form av för- och eftertest och dokumentationer i form av elevernas alster samt fotografier när eleverna ritade eller skrev matematiska symboler. Även anteckningar på whiteboardtavlan utgjorde underlag vid analysen för denna artikel.

4.1 Forskningslektionernas design

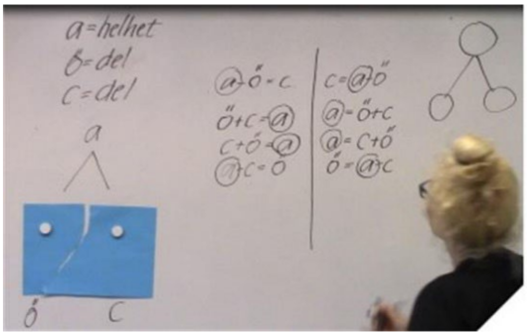
När forskningslektionerna designades utgjorde, som framgått ovan, lärandeverksamhet ett teoretiskt ramverk (se Davydov, 1986/2008; Eriksson, 2017). Genom särskilt utformade uppgifter var avsikten att försätta eleverna i en situation där de skulle motiveras att utforska relationer mellan alla tal i ekvationer genom ett teoretiskt arbete med stöd av en specifik strukturell modell (Figur 3).



Figur 3. Modellen som användes när eleverna utforskade ekvationer.

Modellen skulle visualisera abstrakta egenskaper som relationer mellan alla heltal i en del-helhetsstruktur och därmed få funktionen som ett lärandemodell. Modellen visualiserar en helhet *simultant* med delar för att på så sätt synliggöra relationer mellan *alla* tal i en ekvation. Det som skiljer denna modell från Davydovs modell (Figur 2) är att symbolerna skrevs in i cirklar i modellen under forskningslektionerna (Figur 3) i avsikt att tydliggöra positionerna för tal, kända eller obekanta.

Forskningslektionerna inleddes med att eleverna och läraren utforskade en kvantitet (ett A4-papper) som en del-helhetsstruktur (Figur 4). Papperet benämndes som en helhet och eleverna gav förslag på hur helheten kunde tecknas med en generell symbol. Därefter revs papperet i två olika stora delar och eleverna gav förslag på symboler för att benämna respektive kvantitet (exempelvis *a*, *c* och *ö*). Efter arbetet med papperet introducerades den specifika strukturella modellen för eleverna (Figur 4, höger).



Figur 4. Relationer mellan kvantiteter utforskades med stöd av generella symboler och modeller.

Lärandemodellen, vilken var vald av oss forskare, utforskades av eleverna under forskningslektionerna på olika sätt, initialt med kvantiteter och senare med tal. Relationer mellan helheten och delarna formulerades på åtta olika sätt, dels som kanoniska, exempelvis $a - ö = c$, men också som icke-kanoniska, exempelvis $c = a - ö$ (se Sherman & Bisanz, 2009). Anledningen att teckna relationerna på åtta olika sätt var att synliggöra att helheten eller delarna inte är låsta till en specifik position. Av Figur 4 framgår att den inringade symbolen för helheten, a, antar olika platser.

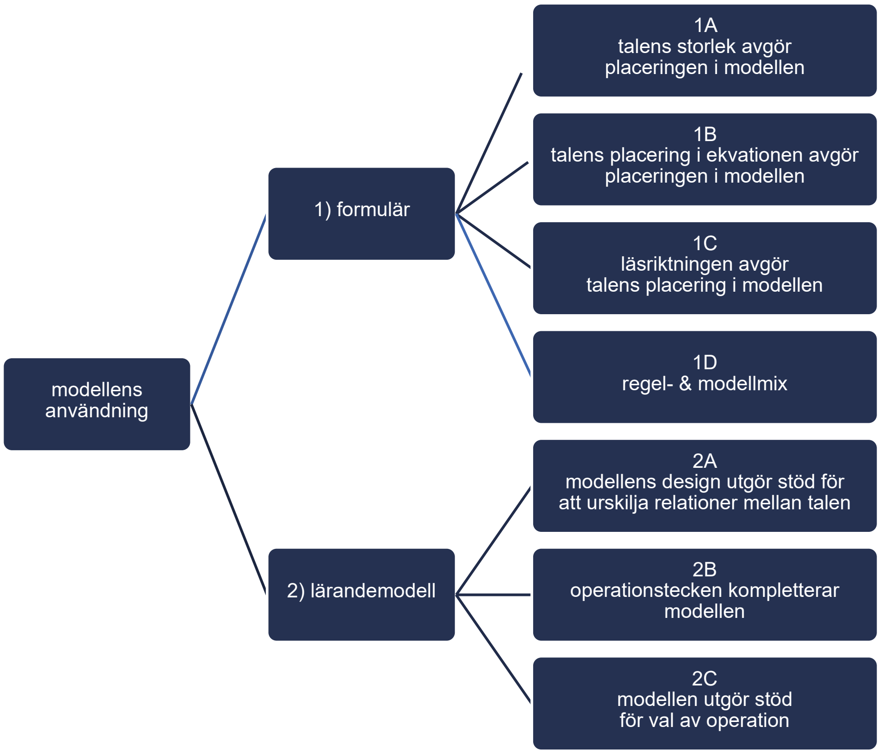
Varje genomförd forskningslektion reviderades inför nästa lektion i avsikt att pröva vad i undervisningen som kan möjliggöra för elever att urskilja den matematiska strukturen för att så småningom utveckla förmågan att bemästra ekvationer. Vid de tillfällen som undervisningen inte möjliggjorde för det avsedda lärandet reviderades lektionen för att i högre grad lyfta fram det undervisningen ännu inte lyckats synliggöra. En utmaning vid revideringen var att konstruera ekvationer som skulle skapa ett behov av lärandemodellen. De revideringar som gjordes för att utveckla undervisningen berörde val av räknesätt. Under forskningslektionerna prövades att introducera ekvationer antingen med addition eller med subtraktion. Revideringarna handlade även om val av ingående tal, vilket innebar att talområdet utvidgades från naturliga tal till att omfatta alla heltal. Under forskningslektionerna varierades även var det obekanta talet placerades eller var negativa tal placerades i ekvationerna. Oavsett årskurs var lektionsdesignen liknande – det som skilde var talens värden i ekvationerna samt antal negativa tal som inkluderades i ekvationerna. Ett exempel på en ekvation från årskurs 3 är $3 + x = 2$ och ett exempel från årskurserna 8 och 9 är $x - (-15) = -14$. Eleverna arbetade såväl i helklass som i grupper med att analysera ekvationer för att identifiera vad som utgjorde en helhet respektive delar. Eleverna fick också uppdraget att formulera en och samma struktur på fyra olika sätt (kanoniskt tecknat) för att därefter välja, en för dem lämplig ekvation, i avsikt att finna värdet på x. Eleverna utvärderade såväl andra elevers som sina egna lösningar.

4.2 Analys

Analysen av datamaterialet genomfördes inledningsvis för respektive stadium av oss var för sig, därefter diskuterade vi resultaten tillsammans. Under analysarbetet användes *tematisk analys* (Braun & Clarke, 2006) i avsikt att identifiera på vilka sätt den specifika strukturella modellen användes av eleverna för att utforska ekvationer. Datamaterialet granskades flera gånger och ett tolkande perspektiv antogs när det inspelade materialet genomlyssnades noga och transkriptionerna lästes fler gånger (Bryman, 2002/2018). Under den inledande analysen identifierades och markerades elevernas uttryck i ord och handlingar i förhållande till modellens användning varefter teman identifierades. Analysen vägleddes av följande analysfrågor: *Vad i elevernas uttryck i ord eller handlingar indikerar om, och i sådant fall på vilka sätt, en specifik strukturell modell användes för att utforska relationer mellan tal i en ekvation?* Braun och Clarke (2006) framhåller att i de fall det aktuella forskningsområdet är tämligen obeforskat kan ansatsen tematisk analys vara lämplig. I den påföljande analysen fokuserades på vilka sätt eleverna använde sig av modellen där datamaterialet kategoriserades utifrån om, och på vilka sätt, lärandemodellen kom att användas. I analysen urskiljdes kvalitativt skilda kärnteman och flera subteman (se Braun & Clarke, 2006). I ett sammanfattande analysarbete undersöktes avslutningsvis tecken på om ett teoretiskt arbete möjliggjorts genom att analysera det resultat som sammanställts i kärntemana.

5 Resultat

Resultatet visar att elever använde sig av modellen på två skilda sätt, vilka kategoriserades i två kärnteman *Formulär* respektive *Lärandemodell* samt i ytterligare subteman (Figur 5).



Figur 5. En schematisk bild avseende elevers kvalitativt skilda sätt att ta stöd av modellen.

De teman som illustreras i Figur 5 presenteras nedan – först översiktligt för att avslutningsvis exemplifieras med elevernas uttryck som bilder och excerpt.

Kärntema 1: Formulär

I kärntema 1 använde eleverna modellen som om den var ett formulär att fylla i. Eleverna stödde sig på olika regler för att placera ekvationers tal i modellen. En regel som uttrycktes var exempelvis ”Det första talet ska stå överst i modellen vid en subtraktion” (elev, årskurs 8). Denna regel stämmer för ekvationer som $x - 7 = 5$, men inte när ekvationer är skrivna som icke-kanoniska, exempelvis som $5 = x - 7$.

I analysen tolkades det att eleverna inte tog stöd av modellen för att identifiera på vilka sätt tal i en ekvation relaterar till varandra. Elever hanterade i stället talen var för sig och visade således inte tecken på att de reflekterade över relationer mellan *alla* tal i en ekvation.

Kärntema 2: Lärandemodell

I kärntema 2 utgjorde modellen ett stöd för att identifiera och uttrycka att *alla* tal (kända eller obekanta) som ingår i en ekvation står i relation till varandra. Eleverna utforskade en ekvation som *en enhet* och modellen var ett redskap i detta arbete. Ett exempel på det skildras nedan när en elev i årskurs 3 resonerade om en helhet och vad som är delar utifrån en del-helhetsstruktur med stöd av modellen ”En del och en del här [de nedre delarna i modellen]. Då blir det ju helhet när det blir tillsammans”. Av citatet framgår att eleven förde ett resonemang och använde modellen som en lärandemodell för att identifiera delarna och helheten.

I analysen tolkades det att de elever som utforskade alla tal i en ekvation som *en* enhet det vill säga, att *alla* tal i en ekvation relaterar till varandra, kunde kopplas till kärntema 2. Även de elever som identifierade en helhet och eller delar, uttryckte det relationella.

5.1 När modellen fick funktionen av ett formular

Elever som använde sig av modellen som ett formulär skapade eller använde en regel att stödja sig på för att identifiera helhet eller delar. Reglerna antog olika karaktärer, vilket under analysen resulterade i fyra subteman till kärntema 1. Det som skiljer subtemana åt grundar sig på de sätt tal eller symboler placerades i modellen. Faktorer som påverkade hur tal eller symboler placerades i modellen utgjordes av tals storlek, placering i ekvationer, läsriktning eller regler.

1A: Talens storlek avgör placeringen i modellen

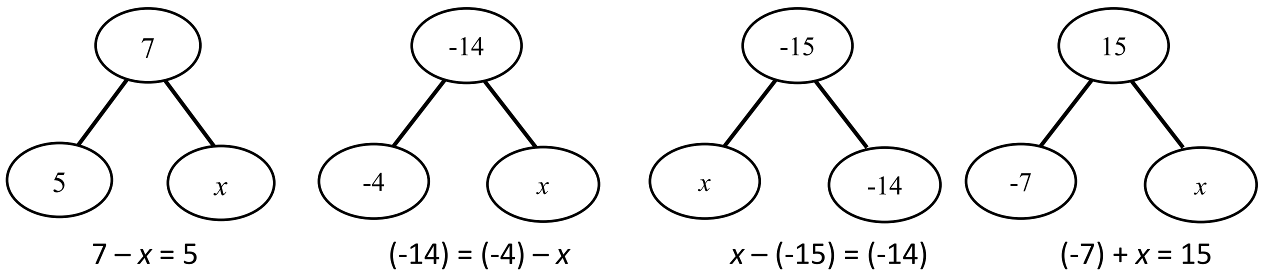
Eleverna utgick från en regel när de placerade ’det största talet’ i modellens översta position (positionen för helheten). I analysen tolkades det som att elever likställde och definierade ’det största talet’ antingen som helhet utifrån *värde* (utifrån ordinalitet) eller *magnitud* (talets avstånd till talet noll). Ett exempel återges i Excerpt 1 där läraren och en elev i årskurs 8 resonerade om på vilka sätt talen i likheten 32 – 8 = 24 skulle placeras i modellen.

Excerpt 1, årskurs 8

> Sofia: Det är det som är det svåra [...]. Men vi skriver trettiotvå där uppe.
> Lärare: Ni skrev trettiotvå där uppe [läraren skriver in talet 32 i modellens översta position].
> Sofia:Ja, eftersom det är det största.
> Lärare: För att det är det största?
> Sofia: Ja, det var ju det hela...

I Excerpt 1 ovan är elevens svar avseende talets placering i modellen korrekt, men motiveringen som ges är inte generaliserbar till en likhet som 2 – 7 = (-5) där helheten är 2 och inte ”det största [talet]”. Elevens sätt att uttrycka sig på indikerar inte en förståelse för relationer mellan talen i likheten avseende del-helhetsstruktur.

I ett exempel från årskurs 9 placerade en elev talet med störst magnitud i modellens position för helhet (Figur 6).

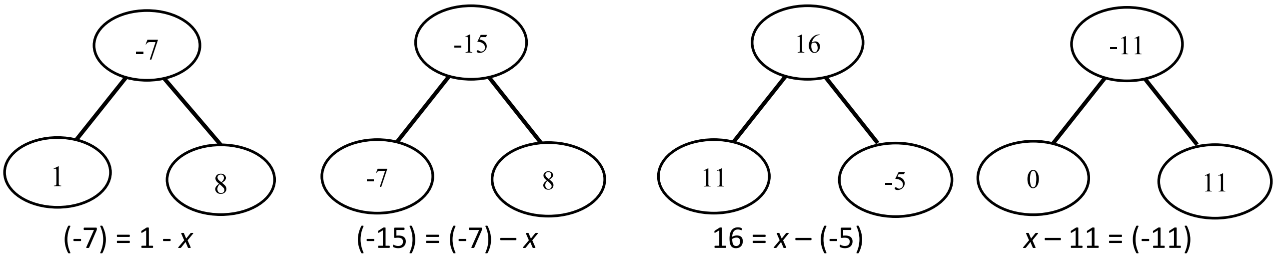


Figur 6. Talet med störst magnitud placerad i modellens position för ’helhet’.

I ovanstående exempel (Figur 6), framgår att eleven såg talet med störst magnitud som en ’helhet’ oavsett om talet utgjorde någon av termerna, summan eller differensen och oavsett om talet var negativt eller positivt. Den regel som eleven följde (talet med störst magnitud är helheten) resulterade i att eleven i den första ekvationen från vänster (Figur 6) urskiljde helhet respektive delar korrekt. I den aktuella ekvationen $7 - x = 5$ är talet 7 helheten och eleven uppgav även att $x = 2$, vilket i sammanhanget kan tolkas som rätt svar av fel anledning. I den andra ekvationen från vänster (Figur 6) leder regeln till att (-14) benämndes som helhet, vilket inte är korrekt för den aktuella ekvationen. Eleven formulerade en annan relation mellan talen i ekvationen: att $x = (-10)$ vilket är korrekt utifrån den ifyllda modellen, men inte med utgångspunkt i den ursprungliga ekvationen. Modellen var inte ett stöd för att urskilja ekvationens del-helhetsstruktur, men däremot för att välja operation och för att finna värdet på ett obekant tal.

1B: Talens placering i ekvationen avgör placeringen i modellen

När eleverna uppmanades att markera helheten i ekvationer och likheter valde ett flertal av eleverna att utgå från talens placering i respektive ekvation och likhet. Exempelvis markerade elever ’svaret’ (summan eller differensen) som helhet. Följande exempel (Figur 7) är hämtat från eftertest i årskurs 9:



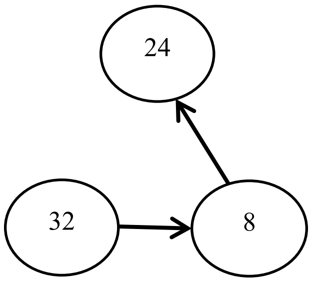
Figur 7. ’Svaret’ (summan eller differensen) markerat som helhet.

I Figur 7 visas exempel på att en del av eleverna placerade ekvationens ’svar’ i modellens position för helhet. I analysen framkom att värdet för det obekanta talet i ekvationen är korrekt beräknat, men att eleven i ovanstående exempel inte använde sig av modellen som ett stöd i arbetet att identifiera helhet eller delar. Det synliggörs eftersom delarnas sammanlagda värde inte överensstämmer med helhetens värde. Snarare användes modellen som ett formulär att fylla i utifrån regeln att svaret är helheten och de övriga två talen fylldes i som delarna.

Ett annat exempel är från årskurs 9 där några elever skapade regeln att talet framför operationstecknet för subtraktion ska placeras överst i modellen och motsvaras av helheten. En elev uttryckte: ”Varje gång det är subtraktion ska helheten vara till vänster [i ekvationen]”. Regeln är generaliserbar för kanoniska ekvationer, men inte för icke-kanoniska. Talen i ekvationen utforskades utan någon reflektion över del-helhetsstrukturen och relationen mellan talen som ligger ’bakom’ regeln.

1C: Läsriktningen avgör talens placering i modellen

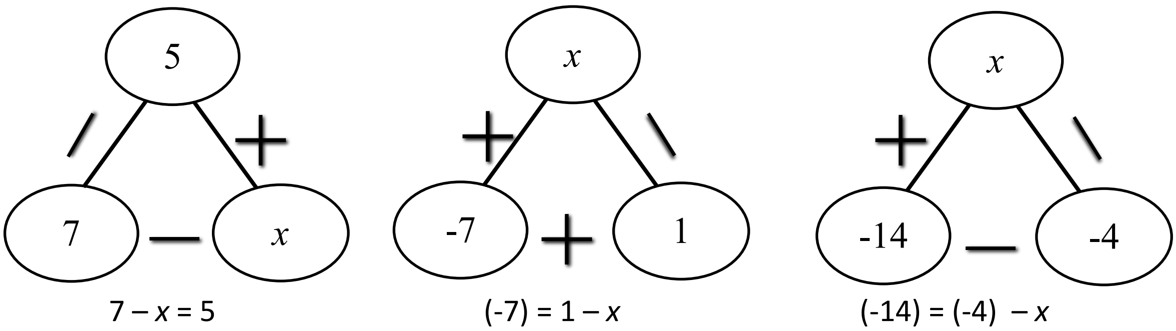
Ett exempel på regeln ’läsriktningen avgör’ är när elever i årskurs 8 placerade tal i modellen utifrån den ordning talen var skrivna i likheten. Elever valde en av positionerna som ’startposition’, alternativt som ’slutposition’ för att därefter placera in övriga tal utifrån den ordning ekvationer och likheter lästes. Karakteristiskt för de sätt elever använde modellen var att linjerna mellan modellens positioner sammanbands med linjer som följer ’läsriktningen’ och inte som de två ’benen’ som förbinder helheten och dess två delar. I Figur 8 är talen i likheten 32 – 8 = 24 ifylld i modellen.



Figur 8. Talen fylldes in i modellen utifrån ’läsriktning’ från vänster till höger.

När eleverna hanterade talen i likheten som att läsriktningen avgör, kom modellen att få en funktion som ett formulär att fylla i.

I ett ytterligare exempel för subtema 1C fick modellens ’ben’ behålla sina positioner mellan de positioner som binder ihop helhet och delar. Eleverna placerade talen i modellen utifrån läsriktning och placerade därefter tecken för operationer: additions- respektive subtraktionstecken mellan talen (Figur 9).

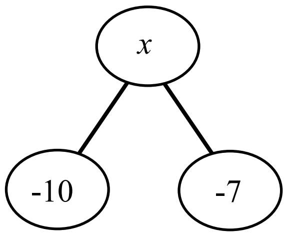


Figur 9. Operationstecken placerade på olika platser i modellen.

Genom elevernas sätt att placera in tal i modellen i förhållande till en ekvation, framgår det att eleverna i samtliga exempel ovan (Figur 9), fyllde i talen i en ekvation i läsriktning med start i den nedre vänstra positionen. Eleverna skrev inte ut likhetstecknet, men däremot använde de ytterligare tecken för operationer (+ eller –) som för att ’fylla ut’ utrymmet mellan talen i modellen. En elev uttryckte att operationstecken kan placeras in ”lite hur som helst”. Eleverna uttryckte inte någon koppling till på vilka sätt talen i ekvationen relaterar till varandra i en del-helhetsstruktur.

1D: Regel- och modellmix

Under forskningslektionerna i årskurserna 8 och 9 arbetade eleverna med ekvationen $x - (-10) = (-7)$. Uppdraget var att, med stöd av modellen, urskilja relationer mellan tal och uppge vilket som utgjorde helhet och vilka som var delar. Eleverna fyllde i x som helhet och (-10) och (-7) som delar i modellen.



Figur 10. Ekvationen x – (-10) = (-7) ifylld i en modell.

Eleverna fyllde i talen korrekt i modellens positioner för helhet respektive delar (Figur 10). Därefter skulle eleverna beräkna värdet på det obekanta talet x. Det som då inträffade var att flera av eleverna omformulerade den initiala ekvationen med hjälp av regeln 'minus och minus är plus' till en ny ekvation, $x + 10 = (-7)$ (Figur 11).

Initial ekvation: $x - (-10) = (-7)$. Omformulerad ekvation: $x + 10 = (-7)$

Figur 11. Omformulering av en ekvation utifrån regeln 'minus och minus är plus'.

Eleverna hade efter omformuleringen (Figur 11) två ekvationer framför sig tecknande olika strukturer. Oavsett vilken av ovanstående ekvationer som beräknas erhålls samma värde på det obekanta talet, x: (-17). Vad som däremot förändras är vilka tal som ingår i de två olika ekvationerna och därför ändras strukturen. I den initiala ekvationen (Figur 11, vänster) ingår talen: (-17), (-10) samt (-7). I den omformulerade ekvationen (Figur 11, höger) ingår talen: (-17), 10 samt (-7). Två av talen förekommer i de båda ekvationerna, men de utgör olika "byggstenar" i respektive ekvation utifrån en del-helhetsstruktur. I den initiala ekvationen utgörs helheten av x medan det i den omformulerade ekvationen är x som är en av delarna som bygger upp helheten (-7). I den initiala ekvationen utgör (-7) en av delarna. Det tredje ingående talet skiljer sig mellan de två ekvationerna, dock är magnituden densamma för de två talen: (-10) respektive 10. En konsekvens av omformuleringen utifrån regeln 'minus och minus är plus', innebar att två helt olika strukturer beskrevs. Den ifyllda modellen utgjorde inte ett stöd för eleverna.

5.2 När modellen fick funktionen av en lärandemodell

För de elever som uttryckte tal i ekvationer som *relaterade* kom modellen att få funktionen av en *lärandemodell* (se Davydov, 1986/2008). Modellen utgjorde ett redskap, det vill säga ett visuellt stöd för att analysera och urskilja relationer mellan tal som en del-helhetsstruktur. Eleverna utgick inte från några regler utan utforskade talen och relationerna mellan dem genom att pröva, ompröva och bevisa relationerna. När relationerna och således del-helhetsstrukturen var klarlagd och formulerad utgjorde lärandemodellen även ett redskap för att välja lämplig operation för att beräkna ekvationer. Tre olika subteman framträdde i analysen, vilka presenteras nedan.

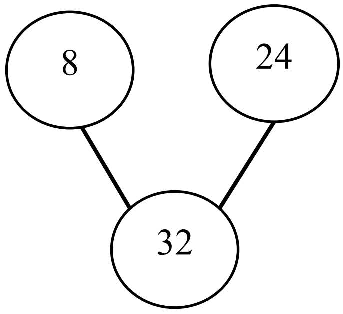
2A: Modellens design utgör stöd för att urskilja relationer mellan talen

Elever utforskade relationerna mellan tal i ekvationer genom att pröva modellens funktion på olika sätt. Under en av forskningslektionerna noterade läraren en elev som utforskade talen i likheten 8 + 24 = 32 med stöd av modellen och lyfte fram detta i helklass.

Excerpt 2, årskurs 8

> Lärare: Du, du beskrev en rolig sak, kan du säga det som du sa till mig där borta? Du hade vänt på den [modellen]?
> Briam: Aha, ja, att de faller ner, och så blir det trettiotvå!
> Lärare: Du hade gjort den så här… [ritar en 'upp- och nedvänd' modell med inskrivna tal enligt Figur 12] … åtta… tjugofyra… och så föll de ned och blev trettiotvå. Då sa vi då… om vi förklarar det matematiskt, hur…
> Briam: Med addition…
> Lärare: Vi adderar de där… ja, precis!

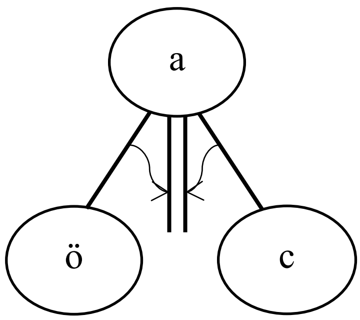
Eleven i Excerpt 2 uttryckte att de (delarna 8 och 24) ”faller ned” och ”blir 32”. Eleven uttryckte en relation mellan talen 8, 24, och 32 och att delarna 8 och 24 tillsammans bildar helheten 32 (Figur 12).



Figur 12. Delarna “faller ned” och bildar helheten.

I Figur 12 visualiseras relationer mellan alla tal i del-helhetsstrukturen på samma sätt som i Figur 3. Eleven vände upp och ned på modellen som även fortsättningsvis visualiserade strukturen.

Ett annat exempel från årskurs 3 där elever utforskade tal i ekvationer genom att ompröva modellens design, är en elev som uttryckte likheten med modellens sneda streck – ’benen’ som förbinder helheten med delarna – och ett likhetstecken (Figur 13).



Figur 13. De två linjerna i modellen liknades vid ett likhetstecken.

Eleven beskrev att *ö* och *c* skulle kunna vara tal där talens värden tillsammans bildar ett tredje värde, *a*, (se Excerpt 3).

Excerpt 3, årskurs 3

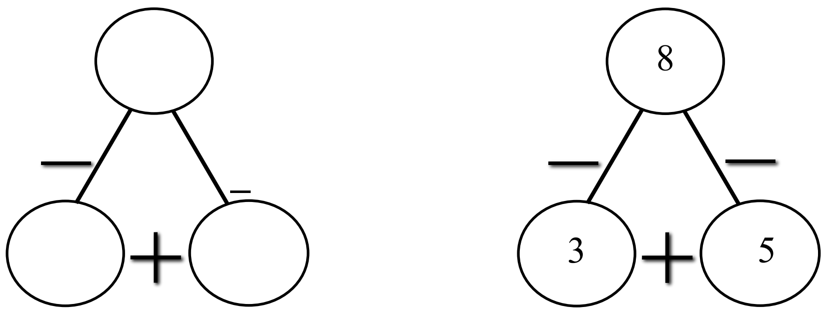
> Elli: Du hade ju ett streck så här [...], det är två saker jag vill säga om det. [...] Det påminner mig rätt starkt om ett är lika med [de två strecken mellan helheten och delarna] för liksom två här nere [delarna] är lika med någonting där uppe. Och så det också där vid papperen [ett papper som rivits i två delar, vilka har benämnts som c respektive ö], där är det också ett sådant där tecken [likhetstecken] så att det blir nästan som, nu säger vi att det skulle vara matte med nummer så där, det är nästan som ö är ett nummer och c är ett nummer och tillsammans så blir det a.
> Lärare: Om jag uppfattar dig rätt, så uppfattar jag att när du ser det här [modellen] att man kan tänka att det här [de två strecken/'benen' i modellen] är ett lika-med-tecken därför att ö plus c är lika med a [läraren pekar på "benen", ö, c och a].
> Elli: Mm.

Under utforskandet av på vilka sätt talen i en ekvation förhåller sig till varandra associerade eleven i Excerpt 3 modellens design med dess innebörd och användning.

2B: Operationstecken kompletterar

Några elever illustrerade relationer mellan helhet och delar med stöd av modellen genom att placera tecken för addition mellan delarna samt tecken för subtraktion mellan helhet och respektive del.

Eleverna utgick i det här fallet från en modell där talen ännu inte var ifyllda. Därefter kompletterades modellen med tecken för addition respektive subtraktion utifrån helheten och dess delar (Figur 14, vänster). Den kompletterade modellen användes därefter som stöd vid utforskandet av ekvationer när tal, kända eller obekanta identifierades som helhet respektive delar och placerades i modellens positioner (Figur 14, höger).



Figur 14. Operationstecken utplacerade i modellen.

I Figur 14 illustreras på de sätt eleverna, med stöd av operationstecken, gestaltade relationer mellan tal i ekvationer. Eleverna urskilde att det i varje ekvation alltid går att identifiera två delar som vid addition bildar en helhet eller att när en av delarna tas bort (subtraheras) från en helhet finns en del kvar. Eleverna förberedde sig således inför att utforska en ekvation med stöd av modellen genom att komplettera en ännu ej ifylld modell (Figur 14, vänster) innan specifika tal placerades i modellen (Figur 14, höger).

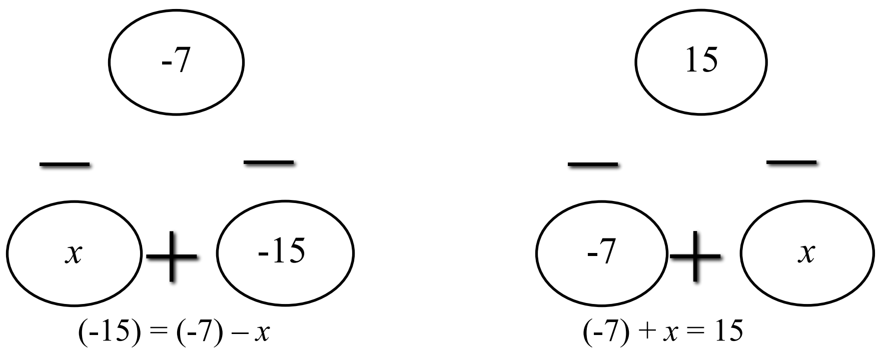
Elever i årskurs 3 resonerade kring relationer med generella symboler (bokstäver) och med stöd av lärandemodellen. Ett exempel åskådliggörs i Excerpt 4 där helheten utgörs av *a* och delarna av *ö* och *c*.

Excerpt 4, årskurs 3

> Ali: Då kan du ju göra plus mellan de [nedre delarna i modellen].
> [...]
> Olle: Man kan lägga minus mellan a och c [helheten och en del].
> Elli: a minus ö [helheten och 'den andra delen'].

Utifrån elevernas resonemang framgår att de urskilde addition och subtraktion som inverser samt relationer mellan helhet och delar, det vill säga, del-helhetsstrukturen.

I Figur 15 återges ett exempel där eleverna placerade ut operationstecken, men inte 'benen' som förbinder helheten med dess delar.



Figur 15. Operationstecken utplacerade i modellen utan ben.

Även när elever utelämnade 'benen' i lärandemodellen, placerade de ut operationstecken för de sätt de tre talen i ekvationen relaterar till varandra såsom helhet respektive delar.

2C: Modellen utgör stöd för val av operation

Under forskningslektionerna utforskade eleverna på vilka sätt talen i en ekvation förhåller sig till varandra och på vilka sätt en del-helhetsstruktur kan visualiseras med stöd av lärandemodellen. Utifrån modellen formulerades ytterligare tre andra ekvationer, vilka tecknade samma struktur som den första. En och samma struktur visualiserades således med *en* modell och tecknades på *fyra* olika sätt, som fyra ekvationer: två additioner och två subtraktioner. Eleverna använde modellen för att utforska sambandet mellan tal i ekvationer som en och samma struktur. Det framgick även att elever med stöd av lärandemodellen medvetet valde och beräknade en annan operation, en för dem, mer lämplig än den som tecknades i den ursprungliga ekvationen. Modellen kom således att utgöra ett visuellt stöd för elever att bemästra ekvationer i ett teoretiskt arbete och i teoretiska resonemang avseende relationer.

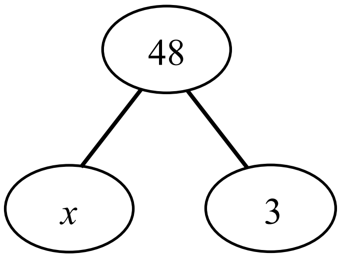
I Figur 16 visas på vilka sätt elever i årskurs 3 under resonemang analyserade en ekvation utifrån talens relationer till varandra med stöd av modellen.

$\underline{48} - x = 3$

$x + 3 = \underline{48}$

$3 + x = \underline{48}$

$\underline{48} - 3 = x$



Figur 16. En lärandemodell och fyra ekvationer, vilka illustrerar samma struktur.

Initialt tecknades ekvationen $48 - x = 3$ (Figur 16, översta ekvationen). Under arbetets gång ritades modellen och de tre talen skrevs in i positionerna. Ekvationen omformulerades därefter till ytterligare tre ekvationer, alla illustrerande samma struktur. Eleverna och läraren resonerade om relationerna mellan de tre talen 48, x respektive 3, vilka kunde tecknas med hjälp av *fyra* ekvationer eller visualiseras med hjälp av *en* modell. Flera elever uttryckte att de skulle välja den nedersta ekvationen, $48 - 3 = x$ (Figur 16) för att finna det obekanta talet, i stället för att beräkna den ursprungliga ekvationen $48 - x = 3$. I Figur 16 är talet 48 markerat, vilket beror på att eleverna tidigare resonerade om vilket tal som utgör helheten i ekvationen.

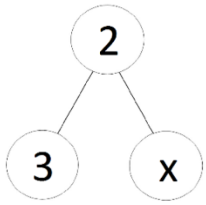
Även vid de tillfällen ett obekant tal utgjordes av ett negativt tal fungerade modellen som ett stöd för att bemästra ekvationerna. Eleverna i årskurs 3 hade inte tidigare mött negativa tal vid beräkningar i undervisningen. Hälften av eleverna hade mött negativa tal som punkter på en tallinje och andra hälften hade aldrig mött negativa tal i undervisningen. Under forskningslektioner utforskade eleverna i årskurs 3 ekvationen $3 + x = 2$ och relationerna mellan de tre talen. Med stöd av lärandemodellen prövade eleverna vilket av talen som utgjorde helhet respektive delar genom att skriva in talen i modellen på olika sätt. Eleverna resonerade och reflekterade avseende relationerna och kom fram till att de två talen, 3 respektive x, adderas med varandra och fastställde därmed att dessa två tal utgör de två delarna, och att 2 därför utgör helheten. Eleverna tecknade därefter tre ytterligare ekvationer (Figur 17).

$3 + x = 2$

$x + 3 = 2$

$2 - 3 = x$

$2 - x = 3$



Figur 17. Fyra ekvationer, vilka tecknar samma struktur.

Under en forskningslektion uttryckte en elev att det obekanta talet måste vara ”minus-ett”. När läraren frågade vad ”minus-ett” innebär svarade eleven “Alltså den kommer efter noll”. Ett annat exempel från en annan forskningslektion i årskurs 3 avseende ekvationen är när x benämns som “ett-minus”.

Excerpt 5, årskurs 3

Ali: Ett-minus.
Lärare: Vad är det som är ett-minus?
Ali: x:et.
Lärare: Du menar att x:et är värt ett-minus?
Ali: Ja.
Lärare: Och då...
Ali: Och det [ett-minus] plus tre, det är två.
Lärare: Då undrar jag, när du säger ett-minus, vad är det för någonting?
Ali: Ja, men det är typ om du typ har [eleven prövar olika matematiska uttryck för att bevisa ”ett-minus”] fyra minus fem.

Efter att eleverna med stöd av lärandemodellen hade identifierat helheten och delarna samt formulerat en och samma struktur till fyra ekvationer valde de en, för dem, mer lämplig operation för att beräkna ekvationen. För ekvationen ($3 + x = 2$) uttryckte eleverna ekvationen $2 - 3 = x$ som 'enklare' att hantera än den ursprungliga. I ett senare skede under lektionen använde eleverna en tallinje som stöd när de 'backade' tre steg från talet 2. Eleverna urskilde följaktligen en additiv struktur samt addition och subtraktion som inverser och kunde därmed beräkna ekvationen $3 + x = 2$ som $2 - 3 = x$.

6 Diskussion

Resultatet visar att eleverna använde sig av modellen på olika sätt vid utforskandet av ekvationer. Vid vissa tillfällen utgjorde modellen en lärandemodell för att urskilja relationer mellan tal i ekvationer och eleverna betraktade därmed ekvationer holistiskt. Genom resonemang i ett teoretiskt arbete uttryckte eleverna ett samband mellan talen för att därefter lösa ut det obekanta talet. Vid andra tillfällen utgjorde modellen inte ett stöd utan användes mer som ett formulär att fylla i. Vid dessa tillfällen betraktades ekvationer atomistiskt och talen som solitärer utan något samband dem emellan. Vid beräkningar stödde sig flera av dessa elever på inlärda regler och procedurer.

I analysen framkom att det var främst de äldre eleverna som använde modellen som ett formulär. Det var även främst de äldre eleverna som stödde sig på regler, vilket inte var lika uppenbart bland de yngre eleverna. En tolkning av detta kan vara att de yngre eleverna inte mött regler i samma omfattning som de äldre. Resultatet visar att de äldre eleverna var mer lösningsfokuserade och mer benägna att prestera ett 'svar' på ekvationerna. De yngre eleverna tog sig däremot i högre grad an uppdraget att identifiera relationer mellan tal i ekvationer, vilket lyckades när modellen kom att få funktionen av en lärandemodell. Intention var att även de äldre eleverna skulle arbeta med att urskilja relationer, men några av dem 'föll tillbaka' på de regler de mött i tidigare undervisning som exempelvis 'minus och minus är plus', vilket ledde till att de fick problem när modellen skulle användas för att urskilja del-helhetsstrukturen. Andra regler som eleverna uttryckte var att "det är det första talet som är helheten i en subtraktion". I detta fall blev reglerna ett hinder för att identifiera det relationella. Att regler kan hindra elever att urskilja relationer och strukturer är någonting som även Brown med flera (1988) och Mason med flera (2005/2012) framhåller. I analysen framträdde vikten av att utmana eleverna med ekvationer där reglerna inte var giltiga för att i stället fokusera på det relationella. Att utmana elever på detta sätt kan kopplas samman med med idén om att använda 'motsättningar' som redskap i lärandeverksamhet (Davydov, 1986/2008). Att äldre elever fokuserade på regler i stället för relationer kan ses som en indikation på att en matematikundervisning utifrån relationer bör introduceras redan för de allra yngsta eleverna. Under forskningslektionerna fanns det även äldre elever som urskiljde relationer mellan talen trots att de mött regler i tidigare undervisning och vid de tillfällena kom modellen att få funktionen av en lärandemodell.

Under forskningslektionerna prövades endast aritmetiska ekvationer (se Filloy & Rojano, 1989). Om den specifikt strukturella modellen ska användas för icke-aritmetiska ekvationer kan begränsningar uppkomma angående dess funktion som ett medierande redskap för att urskilja strukturer i ekvationer eller för att finna värdet på det obekanta talet. En reflektion vi gör är att relationerna mellan talen då inte kan begränsas till en 'ren' del-helhetsstruktur.

Matthews och Fuchs (2020) betonar vikten av att utveckla förståelse för likhetstecknets innebörd och användning i stället för att endast se tecknet som en "från vänster till höger-signal". McAuliffe med flera (2020) framhåller att förståelse för likhetstecknet krävs för att lyckas med matematik oavsett nivå. I ett teoretiskt arbete med modellen som stöd kan förståelse för likhetstecknets innebörd och användning utvecklas. Detta synliggjordes under forskningslektionerna när en elev i årskurs 3 lyfte fram relationer mellan tal samt likhetstecknets funktion som en symbol för ekvivalens mellan värdet på delarna tillsammans och helheten (Figur 13, Excerpt 3). I exemplet satte eleven även ord på hur modellens design hjälpte till att visualisera den matematiska strukturen.

Modeller kan även ha möjlighet att visualisera strukturer utan ord med kvantiteter som sträckor eller areor, vilket kan vara en fördel som lyfts fram i tidigare forskning (t.ex. Mellone & Ramploud, 2015; Polotskaia, 2017; Schmittau, 2011). En begränsning, som vi ser det, med modeller uppbyggda av kvantiteter är att de endast är applicerbara på naturliga tal. Inför forskningslektionerna designades därför en modell med möjlighet att appliceras på ett expanderat talområde omfattande alla heltal och som visualiserar en del-helhetsstruktur. Med stöd av den specifikt strukturella modellen skapades ett meningsskapande sammanhang under de gemensamma resonemangen om matematiska strukturer (Davydov, 1986/2008). Ett exempel på när ett meningsskapande sammanhang kom till uttryck var när eleverna i årskurs 3 analyserade ekvationen $3 + x = 2$ holistiskt, argumenterade för relationerna mellan talen, omformulerade ekvationen på fyra olika sätt för att därefter välja en för dem enklare operation och avslutningsvis lösa ut det obekanta talet. Eleverna hade aldrig tidigare opererat med negativa tal och i linje med vad Kieran (1990) framhåller behöver elevers intuitiva metoder utmanas, vilket tycktes gynnsamt i exemplet från årskurs 3. Detta är en indikation på ett teoretiskt arbete där modellen fick funktionen av en lärandemodell (Davydov, 1986/2008). Även de äldre eleverna behövde utmanas med mer komplicerade ekvationer för att de inte bara skulle 'veta svaret' och för att ett meningsskapande sammanhang skulle iscensättas.

Oavsett årskurs kom modellen att användas som stöd för det teoretiska arbetet på ett relativt likartat sätt. Det kan bero på att upplägget av forskningslektioner utgjorde ett, för eleverna, helt nytt sätt att utforska ekvationer – att urskilja relationer mellan *alla* tal i ekvationer – inte att i första hand prestera ett korrekt svar.

I en learning study är avsikten att skapa så goda förutsättningar som möjligt för elevernas lärande (Carlgren m.fl., 2017). Varje elev deltog i endast *en* forskningslektion, vilket kan ses som en begränsning för den enskilde elevens lärande. De iterativa processerna möjliggjorde dock för forskargruppen att dra lärdom mellan forskningslektionerna under revideringen inför nästkommande lektion.

En slutsats som vi drar är att elever inledningsvis i arbetet med ekvationer behöver försättas i situationer och utmanas med ”krångliga” ekvationer som skapar behov av att analysera strukturen i stället för att enbart fokusera på att finna rätt svar (se även Tuominen m.fl., 2021).

Resultatet som beskrivs i denna artikel är ett komplement till tidigare forskning avseende modellers design för att bemästra ekvationer. Bidraget är modellens potential att visualisera en del-helhetsstruktur även när negativa tal är inkluderade i ekvationer.

Ett förslag på fortsatt forskning kan vara att pröva modellens funktion för icke-aritmetiska ekvationer. Avslutningsvis menar vi att en lärandemodell kan vara till stöd och nyttjas som en 'brygga' för elever att urskilja relationer mellan *alla* tal i ekvationer. Så småningom är avsikten att elever ska bemästra ekvationer utifrån analys och att lärandemodellen ska internaliseras och blir ett tankeredskap.

Tack

Tack till våra medforskande lärare och Vetenskapsrådet för möjliggörande av studien. Tack även till professor Lisa Björklund Boistrup och professor Inger Eriksson för stöd under skrivarbetet.

Referenser

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal, 93*(4), 373–397. https://doi.org/10.1086/461730

Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Whitacre, I., & Schappelle, B. P. (2014). Using order to reason about negative numbers: the case of Violet. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(1), 39–59. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9519-x

Blanton, M., & Kaput, J. J. (2001). Algebraifying the elementary mathematics experience part II: Transforming practice on a district-wide scale. I H. Chik, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Red.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference. The future of the teaching and learning of algebra* (s. 87–95). University of Melbourne.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Murphy Gardiner, A., Isler, I., & Kim, J. (2015). The development of children's algebraic thinking: the impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1) 39–87. https://www.jstor.org/stable/pdf/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Brown, C., Carpenter, T.**,** Kouba, V., Lindquist, M., Silver, E., & Swafford, J. (1988). *Secondary school results from the fourth NAEP mathematics assessment: Algebra, geometry, mathematical methods, and attitudes*. *Mathematics Teacher*, *81*(5), 337–347, 397. https://doi.org/10.5951/MT.81.5.0337

Bryman, A. (2018). *Samhällsvetenskapliga metoder* (2:a uppl.) (B. Nilsson övers.). Liber. (Originalutgåvan publicerad 2002)

Cai, K., & Knuth, E. (Red.), (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Carlgren, I. (2012). The learning study as an approach for "clinical" subject matter didactic research. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 1*(2), 126–139. https://doi.org/10.1108/20468251211224172

Carlgren, I. Eriksson, I., & Runesson, U. (2017). Learning study. I I. Carlgren (Red.), *Undervisningsutvecklande forskning – exemplet learning study* (s. 17–39). Gleerups.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. I T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Red.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (s. 9–24). Lawrence Erlbaum. https://doi.org/10.4324/9781003046585

Davydov, V. V. (1990). Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. (J. Teller övers.). *Soviet Studies in Mathematics Education, 2*, 2–222. NCTM. (Originalutgåvan publicerad 1972)

Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction. A theoretical and experimental psychological study*. Nova Science. (Originalutgåvan publicerad 1986) https://ebookcentral-proquest-com.ezp.sub.su.se/lib/sub/detail.action?docID=3021729

Eriksson, H., & Eriksson, I. (2020). Learning actions indicating algebraic thinking in multilingual classrooms. *Educationals Studies in Mathematics*, 106, 363–378. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10007-y

Eriksson, I. (2017). Lärandeverksamhet som redskap i en Learning study. I I. Carlgren (Red.), *Undervisningsutvecklande forskning - exemplet Learning study* (s. 61–81). Gleerups.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19–25. https://www.jstor.org/stable/40247950

Gorbov, S. F., & Chudinova, E. V. (2000). The effect of modeling on the students' learning (Regarding problem formulation). *Psykologisk Vetenskap och Utbildning* [*Psychological Science and Education*], *2*, 96–110.

Hemmi, K., Bråting, K., & Lepik, M. (2021). Curricular approaches to algebra in Estonia, Finland and Sweden – a comparative study. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(1), 49–71. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1740857

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317–326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. I P. Nesher & J. Kilpatrick (Red.), *ICMI study series. Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 96–112). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139013499.007

Kieran, C. (2018). *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice*. Springer. https://www.springer.com/gp/book/9783319683508

Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers*. (Doktorsavhandling). Göteborgs universitet: Institutionen för didaktik och pedagogisk profession. https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/24151?locale=sv

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Red.), (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Research Council. National Academy Press. https://doi.orf/10.17226/9822

Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Nationellt centrum för matematikutbildning.

Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned. Professional insights gained and shared by teachers of mathematics*. (Doktorsavhandling). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis. https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/22180?locale=sv

Llinares, S., & Roig, A. I. (2005). Secondary school students' construction and use of mathematical models in solving word problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *6*, 505–532. https://doi.org/10.1007/s10763-006-9055-6

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2012). *Developing thinking in algebra*. SAGE Publications Ltd. (Originalet publicerat 2005)

Matthews, P. G., & Fuchs, L. S. (2020). Keys to the gate? Equal sign knowledge at second grade predicts fourth-grade algebra competence. *Child Development*, *91*(1), e14–e28. 10.1111/cdev.13144

McAuliffe, S., Tambara, C., & Simsek, E. (2020). Young students' understanding of mathematical equivalence across different schools in South Africa. *South African Journal of Childhood Education*, *10*(1) a 807. https://doi.org/10.4102/sajce.v10i1.807

Mellone, M., & Ramploud, A. (2015). Additive structure: An educational experience of cultural transposition. I X. Sun, B. Kaur, & J. Novotná. (Red.), *Proceedings of the ICMI Study 23*, 567–574. University of Macau. http://dx.doi.org/10.1142/978-99965-1-066-3

Polotskaia, E. (2014). *How elementary students learn to mathematically analyze word problems: The case of addition and subtraction*. McGill University. 10.13140/RG.2.1.3525.3289

Polotskaia, E. (2017). How the relational paradigm can transform the teaching and learning of mathematics: Experiment in Quebec. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *18*(2), 161–180.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. I C. Kieran (Red.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (s. 3–25). Springer. https://www.springer.com/gp/book/9783319683508

Röj-Lindberg, A.-S., & Partanen, A.-M. (2019). Learning to solve equations in three Swedish-speaking classrooms in Finland. I C. Kilhamn, & R. Säljö (Red.), *Encountering algebra. A comparative study of classrooms in Finland, Norway, Sweden and the USA* (s. 111–138). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-17577-1_6

Schmittau, J. (2011). The role of theoretical analysis in developing algebraic thinking: A Vygotskian perspective. I J. Cai, & E. Knuth (Red.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (s. 71–85). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_5

Schubring, G. (2005). *Conflicts between generalization, rigor and intuition. Number concepts underlying the development of analysis in 17-19th century France and Germany*. Springer. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F0-387-28273-4.pdf

Sherman, J., & Bisanz, J. (2009). Equivalence in symbolic and nonsymbolic contexts: Benefit of solving problems with manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, *101*(1), 85–100. http://dx.doi.org/10.1037/a0013156

Skolverket (2020). *TIMSS 2019. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Internationella studier 2020:8. https://www.skolverket.se/getFile?file=7592

Tuominen, J., Andersson, C., & Boistrup, L. B. (2021). Critical aspects of equations when explored as a part-whole structure. *Proceedings of MADIF 12. The twelfth research seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education* (s. 223–233). Linnéuniversitetet. http://matematikdidaktik.org/wp-content/uploads/2021/03/MADIF12_dokumentation.pdf

Tuominen, J., Andersson, C., & Boistrup, L. B., & Eriksson, I. (2018). Relate before calculate: Students' experiences of relationships of quantities. *Didactica Mathematicae*, *40*, 51–79. https://wydawnictwa.ptm.org.pl/index.php/didactica-mathematicae/issue/view/426

van Oers, B. (2001). Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 59–85. https://doi.org/10.1023/A:1014031507535

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. I T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Red.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (s. 39–59). Lawrence Erlbaum. 10.1201/9781003046585-4

Wettergren, S., Eriksson, I., & Tambour, T. (2021). Yngre elevers uppfattningar av det matematiska i algebraiska uttryck. *LUMAT General Issue*, *9*, 1–28. https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1377