Att undervisa i åk 1 – 3 utifrån en didaktisk ämnesanalys

Christian Bennet, Göteborgs universitet

Om man inte känner till namnen saknar man också kunskap om tingen.
Carl von Linné, Critica Botanica, 1737

Centralt innehåll ur ett didaktiskt perspektiv

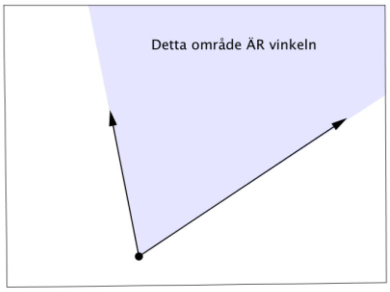
Det centrala innehållet i geometrin för åk 1 – 3 omfattar bland annat grundläggande geometriska objekt som punkter, linjer, sträckor, fyrhörningar, trianglar, cirklar, klot, koner, cylindrar och rätblock. Dessutom ingår geometriska egenskaper hos dessa objekt och deras inbördes relationer. Enligt kursplanen ska eleverna genom undervisning ges förutsättningar att utveckla förtrogenhet med begreppen, resonera kring dem och använda dem för att kunna tolka vardagliga situationer.

Naturligtvis behöver du som lärare, för att uppnå denna målsättning, lägga vikt vid begreppsmässig, eller konceptuell, förståelse. Du utgår från elevernas konkreta verklighet, men ska försöka lyfta deras förståelse av begreppen, deras begreppsuppfattning, till en mer abstrakt nivå. Du bör då själv, förutom att behärska matematiken, kunna analysera denna ur en didaktisk synvinkel. De arbetssätt och förklaringar du använder dig av, liksom ditt val av sätt att representera och uttrycka olika begrepp, behöver kopplas till det matematiska innehållet och elevernas förförståelse. I vissa fall kanske det är mest lämpligt att använda en bildrepresentation uttryckt på papper eller på en interaktiv skrivtavla, i andra fall är det mer lämpligt att använda en språklig representation i form av en beskrivning som relaterar ett nytt begrepp till sådana som är kända för eleverna. Du kommer att läsa mer om representationer och uttrycksformer i del 3.

Matematiken som sådan har en inneboende begreppslig struktur. Man kan säga att begreppen är hierarkiskt ordnade. Exempelvis är en triangel en månghörning som utgörs av tre sträckor, kallade triangelns sidor, vilka möts i tre punkter, kallade triangelns hörn. Begreppet triangel är i den meningen överordnat begreppen sträcka och punkt. På motsvarande sätt är begreppet rektangel överordnat begreppen polygon, sida, hörn och rät vinkel, eftersom en rektangel definieras som en polygon med fyra sidor som möts i polygonens hörn i räta vinklar. Begreppen sida och hörn definieras sedan i sin tur i termer av begreppen sträcka och punkt.

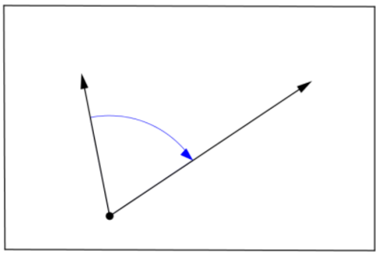
Men det är ingenting som hindrar en elev från att känna igen trianglar eller rektanglar utan att känna till begreppen sträcka, punkt, sida, hörn och vinkel. I själva verket är det ganska troligt att barn lär sig att känna igen och benämna trianglar och rektanglar, kanske som trekanter och fyrkanter, innan de lär sig begrepp som sträcka och punkt.

Ett annat exempel är begreppet vinkel. Matematiskt definierar man ofta en vinkel som den del av planet, den yta, som ligger mellan två strålar, vilka utgår från en gemensam punkt.



Figur 1. Vinkel som en del av ett plan.

Fördelen med denna definition är ett den utgår från några få grundläggande begrepp (stråle, punkt, plan). Men i undervisningen kan den vara problematisk av flera skäl. Till vardags tänker vi oss en vinkel som en öppning eller en vridning och då strider det mot våra intuitioner att se vinklar som ytor. Definierar man en vinkel som en yta är det också lätt att se vinkeln mellan två strålar som representeras med längre pilar som större än samma vinkel representerad med kortare pilar. I undervisningen kan det därför vara bättre att beskriva en vinkel som en vridning, även om det rent matematiskt är svårare att definiera begreppet vridning.



Figur 2. Vinkel som vridning.

Att betrakta begrepp rent matematiskt behöver alltså inte vara detsamma som att betrakta dem utifrån ett lärandeperspektiv.

Enligt kursplanen ska en elev kunna relatera begrepp som rektangel, sida, linje, punkt, hörn, omkrets, area och vinkel till varandra. Men en elev som inte har förstått vinkelbegreppet, kan inte heller i grunden förstå begreppet rektangel, även om hon felfritt kan klassificera olika figurer som rektangel respektive icke rektangel. Förmågan att klassificera olika former kan en elev utveckla utan att förståelsen utvecklas, varför det är viktigt att du som lärare sätter begreppslig förståelse i centrum i din undervisning.

För att ge eleverna möjlighet att förstå matematiska begrepp, behöver du förståss själv ha de matematiska begreppen klara för dig. Men du behöver också didaktiskt ha analyserat den matematik din undervisning behandlar. Du behöver ha ett slags karta över det matematiska landskapet, som visar hur din undervisning kan leda eleverna mot konceptuell förståelse. I den här texten ger vi exempel på hur du kan göra en sådan didaktisk analys av några geometriska begrepp.

Didaktisk ämnesanalys – fyrhörningar

Som ett första exempel på hur du kan analysera geometriska begrepp didaktiskt, har vi valt fyrhörningar och deras inbördes relationer. Dessa begrepp ingår som centralt innehåll inom geometri för årskurs 1 – 3.

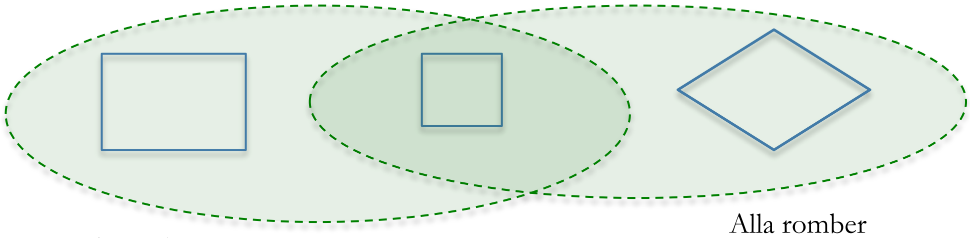
Generellt gäller att undervisningen i de lägre årskurserna behandlar de geometriska begreppen inom ramen för en konkret vardagsvärld, medan de allteftersom i skolans senare årskurser flyttar fokus mot ett mer abstrakt tänkande. Mot bakgrund av den historiska översikten "Om geometri", som du hittar i fördjupningen till del 7, kan man se detta som en fokusförflyttning från geometri som en beskrivning av vår omvärld till geometri som matematisk teori. Och det första steget i denna förflyttning sker redan under de tidiga årskurserna och avspeglas i att eleven når högre van Hiele-nivåer (beskrivna i "Geometri – en kort inledning").

För att uppnå goda resultat i klassrummet är det, som sagt, viktigt att göra en didaktisk analys av det ämnesinnehåll som behandlas. Matematikämnets didaktik förenar en teori om matematikinnehållet med en teori om hur detta innehåll lärs och undervisas om.

Begreppen fyrhörning, parallelltrapets, parallellogram, rektangel och kvadrat har en naturlig inbördes ordning som utgår från hur de definieras, ett slags begreppshierarki: En fyrhörning är en geometrisk figur där ett område innesluts av fyra sträckor vars ändpunkter möts i figurens hörn. Ett parallelltrapets (jo, det heter **ett** parallelltrapets – **en** trapets är ett gymnastikredskap) är en fyrhörning med minst ett par av sidorna parallella. En parallellogram (ja, det heter **en** parallellogram) är ett parallelltrapets där alla sidor är parvis parallella. En rektangel är en parallellogram med alla vinklar räta. En kvadrat är en rektangel med alla sidor lika långa.

Figur 3. Fyrhörningar ordnade begreppsligt efter sina respektive definitioner.

Detta innebär alltså att kvadrater är rektanglar, som i sin tur är parallellogrammer, som är parallelltrapetser, som är fyrhörningar. Exempelvis är alltså alla kvadrater parallelltrapetser, men inte tvärtom. Matematiska begrepp är förstås inte alltid lineärt ordnade på detta enkla sätt, som en kedja. Exempelvis är en romb en parallellogram med alla sidor lika långa. Därmed är alla kvadrater både romber och rektanglar, medan det finns romber som inte är rektanglar och rektanglar som inte är romber.

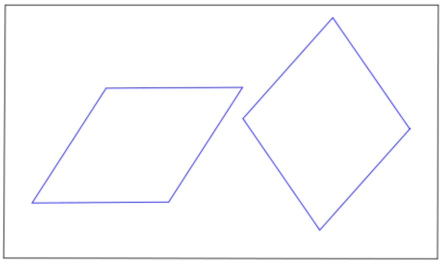


Figur 4. Kvadrater är precis de figurer som är både rektanglar och romber.

För att eleverna ska förstå sambanden mellan dessa begrepp, är det viktigt att variera de exempel man arbetar med på rätt sätt. Du kan, exempelvis, låta eleverna gå på jakt i eller utanför klassrummet och leta efter olika geometriska former. Antingen använder du då något lämpligt geometrimaterial eller så använder du naturligt förekommande former i er omgivning. Arbetar ni i grupper, kan varje grupp få i uppdrag att hitta en triangel, en rektangel, en kvadrat, en romb, osv. Uppdragen kan också kvalificeras genom att eleverna ska hitta stora eller små former eller former i olika lägen – en liten triangel med den trubbiga vinkeln till vänster. Om eleverna har lärt sig begreppen, kan de också leta upp en likbent triangel, en liksidig triangel och en likvinklig triangel. En fråga att samtala om kan då vara vilka exempel som kan vara lika och vilka som kanske måste vara lika. Exempelvis är en figur som är både en romb och en rektangel med nödvändighet en kvadrat, en likvinklig triangel är med nödvändighet likbent och en likbent triangel är med nödvändighet likvinklig.

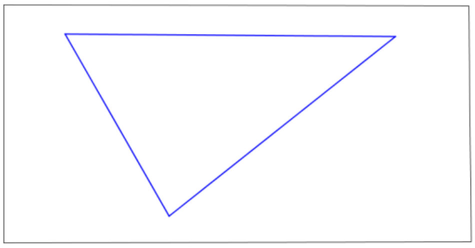
Avsikten med denna aktivitet är du ger eleverna möjlighet att använda geometriska begrepp och att koppla dessa till sin omedelbara omgivning. De föremål de finner utgör konkretiseringar av de abstrakta geometriska begreppen. De ges också tillfälle att kommunicera matematiken och därmed att pröva sin förståelse av begreppen och sambanden mellan dem mot sina kamraters. Därigenom fördjupas och befästs elevernas konceptuella förståelse av grundläggande geometriska begrepp och deras inbördes relationer. En sådan förståelse är förstås viktig i sig och utgör förkunskap för senare delar av ämnet. Men den är också en förutsättning för att eleverna ska förstå hur geometrin kan tillämpas i vardagliga problemställningar.

Det är viktigt att du varierar hur du representerar de olika figurerna. Exempelvis är det lätt hänt att alltid representera en romb med ett hörn nedåt, som till höger i Figur 5. Eleverna kan då få svårt att kategorisera romber som har en av sidorna nedåt som just romber:



Figur 5: Två representationer av romber.

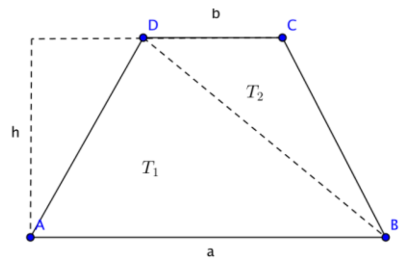
På motsvarande sätt är det lätt att de flesta trianglar man ritar har en bas som är horisontell. Utsatta för triangeln i Figur 6 nedan, kan en elev uttrycka att "Det är en triangel om man vänder på den". Var alltså noga med att variera dina representationer.



Figur 6: En uppochnedvänd triangel?

För yngre elever kan aktiviteten som beskrivs ovan bestå i att förstå att objekt i deras omgivning har form, alltså att kategorisera omvärlden i geometriska termer, att skilja ut formen hos ett föremål från föremålet självt. För en elev som redan har ett register av geometriska begrepp, kanske det snarare blir en övning i att fördjupa sin förståelse av de samband som råder mellan begreppen. En sådan elev kan själv upptäcka att alla liksidiga trianglar har tre lika vinklar och att alla trianglar med tre lika vinklar har lika sidor. Du kan i det senare fallet resonera med eleverna om att vinklarna i en triangel bestäms av längden på sidorna, men inte tvärt om. Just denna observation kan leda till begreppet enkel förstoring och förminskning, men också förklara varför konstruktionsdetaljer i byggnader, exempelvis takstolar, är formade som trianglar. Om vi bestämmer längderna på takstolens sidor, så är takstolen bestämd till sin form. Det gäller inte om vi hade använt fyrsidiga takstolar. I det fallet hade vi behövt fixera både sidornas längder och minst en vinkel.

Begripligt nog är det meningslöst att introducera egenskaper hos fyrhörningar eller trianglar, om eleverna inte känner till begreppen punkt och sträcka. Men det är inte alltid klart i vilken ordning olika begrepp bör introduceras. Visserligen bygger en naturlig definition av rektangel på begreppet parallelltrapets, men parallelltrapetsets area introduceras enklast utifrån rektangelns, eller triangelns, area.



Figur 5. Parallelltrapetsets area utgörs av summan av två trianglars areor. Formeln för triangelns area ger parallelltrapetsets area: $\frac{(a+b)h}{2}$.

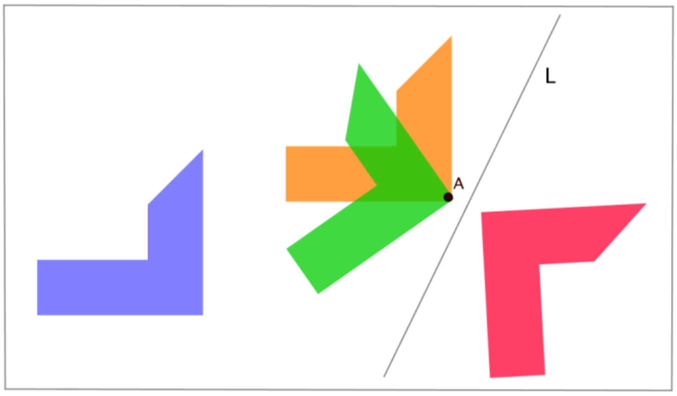
Som lärare är du alltså betjänt av att göra en didaktisk ämnesanalys av det område du ska behandla i klassrummet. Du funderar då över vilka förkunskaper eleverna bör ha och du tar, med diagnoser eller på annat sätt, reda på om eleverna har dessa. Elevernas förståelse för olika begrepp och deras relationer kan prövas, exempelvis genom Skolverkets diagnosmaterial Diamant, där de olika uppgifterna har en genomtänkt progression från enklare samband till mer komplexa och från en passiv till en mer aktiv förståelse. I del 2 beskriver vi hur Diamantdiagnoserna är grundade i en didaktisk ämnesanalys av det centrala innehållet för åk 1 – 9.

Du kan också behöva tänka igenom vilken förförståelse om begrepp utanför geometrin, som eleverna behöver inför ett visst moment. Det kan röra sig om förståelse av tal, men också om förtrogenhet med olika sorters föremål i elevernas vardag. Du bör även tänka framåt lika väl som bakåt i förkunskapsstrukturen. Lika väl som att fundera över vilka förkunskaper ett visst moment i undervisningen kräver, kan du fundera över vilka förkunskaper ett visst moment ger inför framtida moment.

Vi behandlar nu den didaktiska ämnesanalysen mer i detalj, här med skalning i termer av enkel förstoring och förminskning som exempel. Att skala en figur innebär här att konstruera en likformig figur som är större eller mindre än den ursprungliga. En skalning är alltså en förstoring eller en förminskning. Igen ligger fokus på den didaktiska ämnesanalysen, snarare än enbart på analys av det matematiska innehållet eller enbart på en allmändidaktisk analys.

Didaktisk ämnesanalys – skala, förstoring och förminskning

I det centrala innehållet för åk 1 – 3 ingår skala vid enkel förstoring och förminskning. Men för att verkligen förstå begreppet skala krävs att man först har begreppen kongruens och likformighet klara för sig. Enklast är att beskriva två geometriska objekt i planet som kongruenta om det ena objektet kan flyttas, glidas eller speglas, så att det helt täcker det andra objektet. Vill man kan man här tänka sig en sådan förflyttning i (högst) tre steg: en parallellförflyttning där varje punkt i det ursprungliga objektet förflyttas en given sträcka längs parallella linjer, följd av en rotation och en spegling. Sådana förflyttningar brukar man kalla för isometriska transformationer. De bevarar vinklar och längder inom figuren.



Figur 6. En isometrisk transformation. Den blå figuren har parallellförflyttats (gul). Den gula har roterats kring A (grön). Den gröna har speglats i L (röd). Den blå, den gula, den gröna och den röda figuren är alla kongruenta.

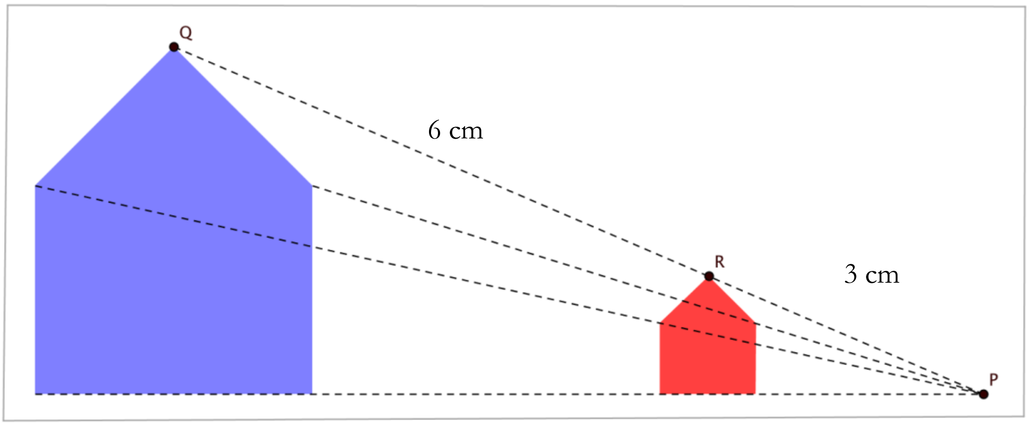
Isometriska transformationer, eller isometriska förflyttningar, kan enkelt illustreras i klassrummet genom att du klipper ut figurer i papp och tillsammans med eleverna undersöker om dessa kan eller inte kan fås att överlappa. Figurer som är kongruenta kan fås att överlappa, medan de som inte är det inte kan fås att överlappa. Man kan lägga märke till att glidning och rotation också bevarar orientering – exempelvis kommer en rektangel där hörnen numreras som en klocka i högervarv att fortfarande vara numrerad i högervarv efter en glidning eller en rotation. Vid spegling byts däremot orienteringen, även om längder och vinklar bevaras.

Att förstå begreppen isometrisk transformation och kongruens är en förutsättning för att förstå begreppet skalning. Det innebär inte att du använder den matematiska terminologin i din undervisning, men att du behöver ge eleverna möjlighet att förstå att den här typen av transformationer bevarar en figurs form. Förstår eleverna fenomenet, kan de senare ta till sig den matematiska terminologin. Din undervisning ska ge eleverna möjlighet att förstå konstans av vinklar och längder, vilket också ligger till grund för deras förståelse av konstans av area.

Det finns flera aktiviteter som du kan göra i klassrummet. Den kanske enklaste är att undersöka om givna utklippta former är kongruenta på det sätt vi beskrev ovan. Nästa steg kan vara att eleverna själva ritar eller klipper ut figurer så att de blir kongruenta med givna förlagor.

Om man, i stället för att glida ett objekt längs parallella linjer, flyttar varje punkt i objektet längs linjer som har en skärningspunkt, uppstår en transformation som fortfarande bevarar vinklar, men som inte bevarar längder. Detta åstadkoms formellt genom att du först väljer en punkt P utanför en given figur (Se figur 7 nedan). Dra sedan linjen QP, för varje punkt Q i din figur, och markera en punkt R på QP exempelvis på avståndet en tredjedel av QP från P. Resultatet blir då en figur som är likformig med den ursprungliga, men som är en tredjedel så stor. Du har då förminskat figuren i skala 1:3, det vill säga 3 längdenheter (exempelvis cm) i din ursprungliga figur svarar mot 1 längdenhet i den mindre figuren. I Figur

7 är den röda figuren en förminskning av den blå i skala 1:3 och den blå figuren är en förstoring av den röda i skala 3:1.



Figur 7. Förminskning i skala 1:3. Den blå och den röda figuren är likformiga.

Denna avbildning är alltså inte isometrisk – den bevarar inte längder – men den bevarar vinklar. Exempelvis kommer parallella linjer i din ursprungliga figur att avbildas på parallella linjer i bildfiguren.

Begreppet skalning eller skala förutsätter didaktiskt begreppet likformighet. Det är därmed naturligt att i undervisningen först behandla begreppet kongruens via isometriska transformationer (även om termen inte används i klassrummet), därefter behandla likformighet och till sist undervisa om skala. I "Didaktisk ämnesanalys – undervisningsidéer" ger vi ett exempel på hur du kan undervisa om skalning i form av enkel fördubbling. I exemplet förutsätts att eleverna har en förförståelse av begreppet likformighet i form av att de kan rita av en given bild. Men det förutsätts inte att de har begreppet likformighet språkligt klart för sig. Här räcker det alltså att de när det gäller just detta begrepp befinner sig på den första van Hiele-nivån.

Matematiskt sett blir analysen av likformighet en annan. Att två figurer är likformiga, innebär då att det går att avbilda den ena på den andra genom en kombination av förstoring eller förminskning som ovan, parallellförflyttningar, rotationer och speglingar. Vill man, kan man här se isometriska förflyttningar längs parallella linjer som specialfall av skalning, där man tänker sig fokuspunkten för skalningen, punkten P i figur 8, placerad oändligt långt bort. Den matematiska analysen av dessa begrepp och deras inbördes samband sammanfaller alltså inte med den didaktiska ämnesanalysen.

Avslutande kommentarer

Innehållet i skolans geometri omfattar, enligt Lgr11, geometriska begrepp och deras inbördes samband. Detta lägger fokus på konceptuellt lärande varför du som ett led i din planering behöver göra en didaktisk analys av det område du ska behandla i din undervisning. En sådan analys ger dig ett slags karta över matematiken du ska behandla i klassrummet i termer av i vilken ordning olika begrepp kan introduceras, vilka förkunskaper som förutsätts. Först därefter kan du bestämma i vilken ordning olika begrepp ska introduceras och hur du kan behandla dem i undervisningen. I del 2 tillämpar vi den didaktiska ämnesanalysen i anslutning till bedömning. Med ett diagnosverktyg som Diamant kan du skapa dig en uppfattning om vad som eventuellt behöver repeteras inför ett nytt avsnitt. Via de strukturscheman som finns i materialet, kan du också göra dig en bild av hur olika begrepp beror av varandra. Du kan då strukturera dina egna ämneskunskaper inom området. I klassrummet är det viktigt att du ger utrymme för och främjar matematiskt samtal både gruppvis och i helklass. Att undervisa mot konceptuell förståelse kräver, precis som språkundervisning, att undervisningen ger eleverna tillfälle till övning i att använda terminologin och att kommunicera sina begreppsbilder. Varje elev måste ges upprepade möjligheter att jämföra sin egen begreppsförståelse, sina egna begreppsbilder, med sina kamraters och med lärarens. Du kommer att läsa mer om kommunikation av matematik i delarna 4 och 8.