

Geometri – en kort inledning

Christian Bennet och Madeleine Löwing, Göteborgs universitet

Alla människor skapar omedvetet ordning i den värld de lever i genom att kategorisera sina varseblivningar. Med hjälp av begrepp, namn och klassificeringar av olika slag ger vi världen struktur. Vi betraktar olika delar av omgivningen som enskilda objekt – stolen är ett annat objekt än bordet, vi urskiljer enskilda grässtrån i en gräsmatta, vi skiljer vattnet i glaset från glaset självt. Oavsett om denna kategorisering är medfödd eller förvärvad, så utvecklas den i takt med att vi lär nya begrepp och utvecklar vårt språk. Vi lär oss att se mönster och former, likheter och olikheter. Vad vi "ser" omkring oss är beroende av vilka kategorier vi använder, vilken kultur vi är uppfödda i. Francis Galton, upptäcktsresande och etnolog, redogör i sin skildring av en resa i södra Afrika 1851 för hur Damarafolket, som levde på boskapsskötsel, kunde hålla reda på stora flockar med kor. Han förundrades över att de direkt såg när en ko saknades, trots att de inte hade räkneord för tal större än 5. Det visade sig att de utan problem kände igen var och en av sina kor på ansiktet och saknade behov av att räkna dem. När Galton och en medlem av Damarafolket tittade på en flock boskap, såg de alltså verkligheten på helt olika sätt. De kategoriserade olika.



Figur 1: Kor med olika personligt utseende.

Som barn lär vi oss tidigt att använda geometriska kategorier. Vi lär oss att vissa föremål är runda, andra kantiga. Vi lär oss lägesord som "framför", "bakom", "över" och "under". Vi lär oss att jämföra storlek, längd och bredd. Ett barn som uttrycker att "Din väska är större än min" har inte bara lärt sig att se väskorna som enskilda föremål, utan har också tillgång till begrepp som längd eller volym och relationer som "större än" eller "längre än". Mycket av detta lär sig barnen i förskoleåldern, men i skolan är det dags att medvetandegöra barnen om de begrepp de använder, att generalisera begreppen och att klä dem i ett mer precist språk, att tilldela olika storheter måttetal på ett systematiskt sätt. Lådors former kan preciseras till kuber eller rätblock. Spetsiga föremål kan bli pyramider eller koner. Fyrkanter kan

preciseras till rektanglar, kvadrater, romber, parallelogrammer. Det senare förutsätter att barnet lär sig att urskilja plana figurer i vår tredimensionella värld, något som är långt ifrån självklart och som måste läras.

Den här modulen handlar om hur du kan ge dina elever förutsättningar att lära geometri både som ett språk för att beskriva världen och som ett verktyg för att kategorisera världen. Så småningom ska eleverna ges möjlighet att utveckla geometrin till en uppsättning begrepp med vars hjälp de kan beskriva komplexa rumsliga fenomen och lösa komplexa problem. I din geometriundervisning har du goda möjligheter att ge eleverna förutsättningar för att utveckla kunskaper och förmågor på ett spännande, utforskande sätt.

van Hieles nivåer

Precis som för alla andra områden, lär vi oss matematiken i steg. Vi börjar med en grund förståelse av enklare begrepp och utökar successivt vår kunskap mot djupare förståelse och till mer komplexa begrepp. Därmed inte sagt att lärandet går ensidigt från det konkreta till det abstrakta – abstrakta begrepp används ibland för att vi ska få syn på och kunna kategorisera det konkreta.

Grundat i Piagets teorier om lärande skapade det holländska paret Dina och Pierre van Hiele 1957 en teori för hur barn lär sig geometri. Deras modell består i fem stadier som beskriver hur barn resonerar om geometriska former:

1. **Igenkännande nivå:** Under detta första stadium kan eleverna känna igen och benämna enkla geometriska figurer, men är beroende av exempel snarare än generell form. En ofullständig figur kan ses som triangel, samtidigt som en triangel som står på sin spets eller en extremt oliksidig triangel inte klassificeras som triangel.
2. **Beskrivande nivå:** Under det andra stadiet kan eleverna tala om former mer generellt. De kan ange olika egenskaper som tillkommer former, exempelvis att parallelltrapetser har fyra sidor, varav minst två är parallella, att rektanglar har fyra räta vinklar eller att ett rätblock har sex sidoytor. Däremot är olika begrepp inte ordnade för dem på ett naturligt sätt. Exempelvis är det inte klart för dem att kvadrater är romber eller att rektanglar är parallelogrammer. Eleverna kan analysera olika former och använda exempel, men inte resonera deduktivt, det vill säga logiskt korrekt, eller generaliserande.
3. **Teoretisk nivå:** Under det tredje stadiet kan eleverna resonera deduktivt, det vill säga logiskt bindande, och ser att egenskaperna hos en viss form medför egenskaperna hos en annan. De kan exempelvis sluta sig till att alla kvadrater är rektanglar eller att basvinklarna i en likbent triangel är lika. De förstår nödvändiga och tillräckliga villkor för att en figur skall vara av en viss typ, exempelvis att en rektangel med fyra symmetrilinjer är en kvadrat.
4. **Deduktiv nivå:** Under det fjärde stadiet förstår eleverna begreppet deduktion. De kan känna igen och förstå begreppen bevis, axiom och definition.

5. **Stringent nivå:** Under det femte stadiet förstår eleverna geometrin som en formell teori, de inser skillnaden mellan euklidisk och icke-euklidisk geometri och ser geometrin på samma sätt som en matematiker gör. (Vi återkommer till dessa begrepp i del 8.)

I grundskolan kan elever normalt uppnå det tredje stadiet och uppnår under de första årskurserna normalt det första och det andra stadiet. En elev kan ligga på olika stadier när det gäller olika delar av geometrin och olika elever vandrar mellan stadierna i olika takt. Det är heller inte självklart precis vad de olika stadierna beskriver, utan indelningen bör betraktas som ganska grov.

Via geometriundervisningen kan du hjälpa dina elever att få ett konstruktivt förhållningssätt till geometrin och matematiken genom undersökande och resonerande undervisning. Du kan hjälpa dem att successivt fördjupa sin resonemangsförmåga i enlighet med van Hiele-nivåerna.

För att förstå geometri och för att lösa geometriska problem krävs det en rad begrepp och för att kunna använda och kommunicera dessa begrepp krävs det adekvata termer för begreppen. Individen utvecklar hela tiden sin förståelse av begreppen. Det lilla barnet uppfattar formen eller begreppet kvadrat som ett vanligt förekommande mönster. I skollåldern när eleven har tillägnat sig mer kunskaper och utvidgat sin förståelse har hon möjlighet att uppfatta en kvadrat som en parallelogram med fyra symmetrilinjer.

När eleverna möter ett nytt begrepp är det centralt att de har förkunskaper för att ha möjlighet att förstå det nya begreppet. Det är därför viktigt att du som lärare har kunskap om en förkunskapsstruktur och använder förenklade förklaringar på lämplig nivå för eleverna. De preliminära begrepp som eleven i de tidiga årskurserna lär sig ska senare modifieras och förfinas för att på sikt bli generella och abstrakta. Van Hieles teori ger en struktur åt geometriundervisningen och går från det enkla intuitiva till det generella och abstrakta.

Det matematiska språket

I matematikklassrummet är språket viktigt för elevernas lärande. Alla använder vi ett vardagsspråk för att beskriva vår omvärld. I vardagsspråket ingår ord som "boll", "låda", "rund", "ring", "fyrcant", "spets", och en uppsjö av lägesord och jämförande uttryck. I matematiken ersätts dessa ord med precisa termer som "sfär", "rätblock", "cirkel", "rektangel" och "kon". En anledning till detta är att matematiken ska vara generellt användbar. När vi navigerar på haven utnyttjar vi att jorden är en sfär, utan att den i konkret mening är en boll. Vi kan använda oss av formeln för ett rätblocks volym för att få veta hur mycket luft som finns i ett klassrum eller hur mycket vatten som ryms i en bassäng, utan att vare sig klassrummet eller bassängen är lådor. Att vi ser en skokartong, ett klassrum och en bassäng som likartade, kräver att vi har begreppet rätblock och att vi liknar jorden vid en boll, kräver att vi ser dem båda som sfärer eller klot. De geometriska begreppen är på det sättet en förutsättning när vi kategoriserar rummet vi lever i, det vill säga när vi ser olika föremål som

lika i olika avseenden. På motsvarande sätt är matematikens olika områden användbara i många olika kontexter just genom att matematikens språk handlar om abstrakta objekt, snarare än konkreta föremål i vår omgivning. Den som ska beräkna hur mycket gräsfrö som behövs till en gräsmatta och den som ska avgöra hur mycket kakel som behövs till ett badrum, använder samma geometriska formler för att beräkna areor. Samma geometri används i en GPS som för att räkna ut höjden av ett träd med hjälp av dess skugga. Matematik är generalisering.

För att uppnå konceptuell, det vill säga begreppslig, förståelse, behöver eleverna ord för de olika matematiska begreppen. Det innebär att du som lärare bör skapa en kultur i matematikklassrummet som bejakar diskussion och kommunikation av matematiskt innehåll. Du måste skapa förutsättningar för att ett matematiskt samtal ska kunna föras både elever sinsemellan och mellan lärare och elev. Du behöver då uppmärksamma eleverna på hur det precisa matematiska språket ersätter det ofta vaga vardagsspråket. Exempelvis ersätter de precisa orden kvadrat, romb eller rektangel i olika situationer det vaga ordet fyrkant. Elevers förmåga att kommunicera matematik är alltså beroende av hennes språkliga förmåga.

Språk är på olika sätt centralt i hela modulen. Du kommer att läsa om att arbeta språkutvecklande i klassrummet i modulens del 5 och i del 7 anknyter vi till språket då vi diskuterar matematiskt resonemang. Vidare kommer du i del 2 att läsa om formativ bedömning, vilket inbegriper en återkoppling till eleverna som kan stödja deras utveckling av begrepp och språk.

Bedömning

Det är bra om du tidigt diagnostiserar vilka kunskaper dina elever har med sig från förskolan. Sådana diagnoser kan utgöra ett stöd för din planering och ditt genomförande av geometriundervisningen. Men en förutsättning för att du ska kunna värdera elevers kunskaper är att du själv har goda didaktiska ämneskunskaper om geometrin, att du har en mental karta över det aktuella innehållet. Att, bildligt talat, rita en sådan karta består i att analysera matematiken ur ett didaktiskt perspektiv, det vill säga att strukturera ämnesinnehållet utifrån vilka förkunskaper förståelse av olika begrepp kan kräva. I texten ”Att undervisa i åk 1 – 3 utifrån en didaktisk ämnesanalys” beskriver vi vari en sådan analys består och vi ger exempel på hur en didaktisk ämnesanalys kan se ut.

I del 2 beskriver vi sedan hur du med hjälp av den didaktiska ämnesanalysen, din mentala karta, kan kommunicera vad eleven ska lära sig och vilka kvaliteter som krävs i elevens kunnande. Din mentala karta utgör alltså ett stöd för dig att planera din undervisning och därmed för att du ska kunna ge eleverna adekvat undervisning. Den utgör också ett stöd när du ska uppfatta och värdera elevernas förförståelse.