

Likhetstecknet

Ingrid Olsson, fd lärarutbildare Mitthögskolan

Lärarakтивitet.

1. Skriv = eller \neq i den tomma rutan, så att det stämmer. Motivera ditt val av tecken.

$$8 + 4 \square 5 + 6$$

$$8 + 4 \square 2 \cdot 6$$

$$8 + 4 \square 20 - 6$$

- Vilken begrepps-förståelse av likhetstecknet behövs för att klara dessa uppgifter?
- Ligger fokus på räknandet eller på likhetstänkandet, när du löser uppgifterna?
- Vilket av orden *är* eller *blir* använder du när du med ord motiverar ditt val av tecken?

2. Lös uppgifterna.

$$8 + 4 = \underline{\quad}$$

$$2 \cdot 6 = \underline{\quad}$$

$$20 - 6 = \underline{\quad}$$

- Vilken begrepps-förståelse av likhetstecknet behövs för att lösa dessa uppgifter?
- Ligger fokus på räknandet eller på likhetstänkandet, när du löser uppgifterna?
- Vilket av orden *är* eller *blir* använder du när du med ord ska uttrycka $8 + 4 = 12$?

3. Lös ekvationen.

$$x + 10 = 50$$

$$x =$$

- Vilken begrepps-förståelse av likhetstecknet behövs för att lösa ekvationen?
- Hur tror du att elever som inte har likhetstänkandet uppfattar ekvationer?

Begreppskvalitet som håller för fortsatt lärande

För att avgöra vilken kvalitet elever behöver ha på begrepp måste läraren titta framåt på hur det ska användas senare. Det avgör vilken kvalitet som krävs nu. Brister i begrepps-förståelsen kan medföra att de senare misslyckas i sitt fortsatta lärande.

För att lösa ekvationer krävs att eleven förstår att likhetstecknet står mellan två uttryck med samma värde, likheter. Den aspekten behövs också för att resonera om och jämföra uttryck, för att skriva uttryck vid problemlösning och för att förstå räknelagar som $4 + 3 = 3 + 4$ eller $a + b = b + a$. Detta måste lyftas fram redan i åk 1.

De nationella ämnesproven testar förståelsen av likhetstecknet i uppgifter som $3 + 5 = \underline{\quad} + 1$. Elever som enbart förstår likhetstecknet som en operator, *blir*, skriver då 8 på det tomma strecket. Ofta följer en felaktig fortsättning, som $3 + 5 = 8 + 1 = 9$.

Likhetstecknet som är och som blir

Likhetstecknet används för att ange att två uttryck betecknar samma sak, eventuellt efter en uträkning. Det utläses "är lika med" eller bara "är". (Det kan vara missledande att säga "fem plus sju blir tolv" eftersom verbet blir antyder en förändring, alltså att $5 + 7$ skulle vara något för att sedan bli något annat.) (Matematiktermer för skolan)

Undervisningen ska syfta till att eleverna uppfattar likhetstecknet som ett tecken mellan två likheter med betydelsen *är*. I uppgiften $5 + 7$ är det naturligt att säga "fem plus sju blir tolv" vid själva räkneoperationen, men "fem plus sju är tolv" om det gäller hela uttrycket $5 + 7 = 12$. Problemet är inte själva ordvalet utan om elever endast uppfattar likhetstecknet som tecknet där man skriver svaret och att likhetsaspekten inte alls uppmärksammas. Många elever misslyckas med ekvationer på grund av bristande förståelse av likhetstecknets innebörd. Undervisningen måste därför betona likhetsaspekten redan från början.

Dynamisk och statisk uppfattning

Likhetstecknet har ofta införts parallellt med additionssymbolen $+$ och med uppgifter som "Du har tre pennor och får två pennor till. Hur många pennor har du då?" Eftersom situationen är dynamisk, två pennor kommer till, uppfattas likhetstecknet i uttrycket $3 + 2 = 5$ som att det "blir" fem pennor.

Formuleringen "Du har tre blå pennor och två röda pennor. Hur många pennor har du sammanlagt?" gör det naturligt att skriva $3 + 2 = 5$ samt att säga att det *är* fem pennor. Här är situationen statisk, det är inget som tillkommer utan de två pennsorterna läggs samman.

Motsvarande för subtraktion:

Dynamisk: "Du har fem äpplen och ger bort två äpplen. Hur många äpplen har du sedan kvar?" Många elever har endast detta ta bort-tänkande i subtraktion vid $5 - 3 = \underline{\quad}$

Statisk: "Anton har fem kottar och Ella har tre. Hur många fler kottar har Anton?"

○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ Här jämförs antal och det kan även skrivas $5 - 3 = \underline{\quad}$.

Många elever saknar differenstagande. Det behövs för att enkelt kunna beräkna exempelvis $8 - 7$, $21 - 19$ och $401 - 398$, med hjälp av addition: *399, 400, 401*.

Val av räknehändelser styr vilken begreppsförståelse av likhetstecknet som eleverna utvecklar. Undervisningen måste erbjuda uppgifter med såväl statiska som dynamiska räknehändelser samt synliggöra dessa genom resonemang med eleverna.

Håll kunskap vid liv

När likhetstecknet introduceras jämförs det ofta med en balansvåg. För att vågskålarna ska väga jämnt måste de väga lika mycket, liksom likhetstecknet kräver att talen/operationerna ska ha samma värde på var sida om tecknet t ex $4 + 1 = 3 + 2$. Tecknet betyder då *är* och inte *blir*. Den betydelsen önskar vi att eleverna ska använda när de resonerar i, med och om matematik samt senare vid ekvationer i algebra. Om eleverna möter likhetstecknet med balansvågar och matematiska likheter i åk 1 men sedan enbart möter uppgifter av typen *blir*, som $3 + 2 = \underline{\quad}$ och $34 + 25 = \underline{\quad}$, utan resonemang om likheter, är risken stor att likhetstänkandet försvinner. *Erövrad kunskap måste hållas vid liv och undervisningen måste hela tiden ge eleverna möjlighet att repetera begrepp och operationer.*

Miniräknarens





Alla elever har använt =-knappen på miniräknaren. Man kan trycka in $5 + 3 =$. Då visar miniräknarfönstret 8. Genom att vi sedan trycker + 4 följt av =-knappen, visas 12 i fönstret. Miniräknaren räknar $5 + 3 = 8$ och adderar sedan 4 som ger svaret 12. Med hänsyn till likhetstecknets betydelse får man inte skriva $5 + 3 = 8 + 4 = 12$. Knappen = fungerar inte som likhetstecken utan som operator, en funktionsknapp. Det är efter den som svaret kommer. Just den felaktiga förståelsen har en del elever och den är nödvändig att åtgärda. Dessa räkneoperationer ska skrivas i två steg: $5 + 3 = 8$, $8 + 4 = 12$.

Eftersom symbolen = finns på knappen är det viktigt att undervisningen lyfter fram och uppmärksammar knappens funktion, dess tecken och hur räkneoperationerna ska redovisas för att stämma med likhetstecknets innebörd.

När är det inte likheter? – förslag till introduktion

Eftersom elevernas uppfattning av likhetstecknet är så viktig kanske tecknet borde introduceras före symbolerna + och – och då i statiska situationer. Vi skulle komma ifrån problemet med *blir* i betydelsen att det är efter tecknet man skriver svaret. Utan räkneoperationer ligger fokus helt och hållet på likheter eller inte likheter.

Variationspedagogiken betonar vikten av att även visa när något inte gäller. Här skulle det innebära en jämförelse av t ex  och . Vi kan inte skriva = mellan grupperna av bollar eftersom antalet bollar är olika, två respektive tre. I stället passar tecknet \neq som betyder inte lika med eller skilt från. Om vi blandar sådana uppgifter är det nödvändigt att för varje jämförelse ta ställning till om det är likheter eller inte, och välja antingen = eller \neq .



Eleverna skriver = eller \neq i rutorna. För varje uppgift måste tecknets innebörd vara i fokus.



Röda bollar och blå bollar är inte lika?

Någon kanske påpekar att röda och blå bollar inte är lika, färgerna är olika. Sådana kommentarer gör det nödvändigt att samtala om att det matematiska tecknet = inte handlar om föremålens egenskaper utan om antal och tal. Vi kan förtydliga detta genom att lägga siffror som anger antalet under respektive grupp. Det är lätt att ta för givet att alla tänker på antal, men en del elever kanske fastnar på färgen, andra på hur bollarna ligger och någon på om bollarna verkligen är lika stora.

Det är inte lätt att i förväg tänka ut hur olika elever uppfattar det undervisningen tar upp, men genom att känna till vanliga missuppfattningar kan läraren hjälpa eleverna till korrekt begreppsförståelse. Det är ett viktigt inslag i undervisningen att elever, i små och stora grupper, resonerar om det nya, sätter ord på det och vågar säga hur de uppfattat det. Frågor som ”Vad händer om ...?” där vi ändrar på förutsättningarna, utmanar eleverna till reflektion. ”Vad händer om det är bara en boll på varje sida? Vad händer om det är tio bollar? Hundra bollar? Kan vi ha samma tecken om det är en miljon bollar på varje sida?”

Ställ utmanande frågor!

Variera antalet föremål, lägg siffror, jämför antal och välj passande tecken att lägga mellan grupperna, = eller \neq . Låt eleverna motivera sina val.

Lägg  \neq  och låt eleverna föreslå vad man skulle kunna göra för att få lägga = i stället.

Börja konkret

Låt eleverna ställa sig i grupper, berätta om grupperna och jämföra antal. Låt dem också använda plockisar och lägga lappar med = eller \neq mellan sina grupper och rita motsvarande. Därefter kan det vara lämpligt att skriva passande tecken på en färdigproducerad stencil eller i en lärobok. Steget från det konkreta arbetet till de abstrakta symbolerna kan vara stort för många elever. Det gäller att lägga fokus på rätt sak. Ska eleverna fundera kring = bör inte själva räknandet vara för svårt och ta för mycket energi. En del elever tycker det är tråkigt om det är alltför lätt. De behöver en större utmaning, i t ex ett annat talområde.

Vilken uppfattning har eleverna nu av likhetstecknet?

- Låt eleverna berätta vad tecknet = betyder och ge exempel på hur det används.
- Låt eleverna lösa en flervalsuppgift. Se förslag nedan.
- Diskutera gemensamt och uppmuntra eleverna att motivera sina val av svar.

Vilket tal ska stå i den tomma rutan? Välj alternativ.

$$3 + 5 = \square - 2$$

A. 6

B. 8

C. 10

D. 12

$$6 \cdot 4 = \square - 4$$

A. 10 B. 20 C. 24 D. 28

Den här typen av uppgifter, åtföljda av diskussioner i klassen och uppföljande intervjuer, kan ge god information om elevers uppfattningar. De felaktiga svarsalternativen ger en indikation om hur eleven uppfattar likhetstecknets innebörd och användning. Svaren på skriftliga uppgifter kan ge en första indikation, men det är i intervjuer och diskussioner som vi verkligen kan få insyn i elevers tankar och idéer som sedan kan bli utgångspunkt för undervisningen.

Förslag för att ta reda på elevernas uppfattning av likhetstecknet, som underlag för undervisning:

- Alla elever har två kort, = och \neq . Läraren säger/skriver två uttryck, exempelvis $3 + 5$ och $7 + 1$. Eleverna håller upp ett av korten och du ser deras val.
- Skriv en flervalsuppgift och låt eleverna visa ett kort för vart och ett av alternativen A, B C och D.
- Låt eleverna svara skriftligt på några flervalsuppgifter och motivera sina val i den gemensamma diskussionen.
- Låt eleverna skriva fler liknande uppgifter.

Det är viktigt att lägga fokus på rätt sak. Några exempel på frågor att reflektera över och som kan generaliseras till annat matematikinnehåll:

Att fundera över innan jag genomför diagnoser och intervjuer:

Hur behandlas likhetstecknet i mitt läromedel?

Hur brukar jag undervisa kring likhetstecknet?

Vilken begreppsförståelse tror jag att mina elever har av likhetstecknet?

Inför planering av undervisningen:

Vad bör eleverna förstå kring likhetstecknet?

Vilka är de kritiska aspekterna för undervisningen?

Vad får jag inte ta för givet?

Vad måste jag komplettera i mitt läromedel?

Hur vet jag att alla elever är med?