

# Hur uppfattar lärare fenomenet differens/skillnad?

Hur några lärare som undervisar grundskolans årskurser 1-3 uppfattar fenomenet differens/skillnad

Jane Tuominen

Institutionen för pedagogik och didaktik  
Examensarbete 15 hp  
Matematikdidaktik/Mathematics Education  
Självständigt arbete i didaktik DIG37F (15 hp)  
Vårterminen 2015  
Handledare: Kajsa Falkner  
Examinator: Lena Geijer  
English title: How Do Teachers Perceive the Phenomenon of  
Difference?



Stockholms  
universitet

# Hur uppfattar lärare fenomenet differens/skillnad?

**Hur några lärare som undervisar grundskolans årskurser 1-3 uppfattar fenomenet differens/skillnad**

**Jane Tuominen**

## Abstract

The aim of the survey was to explore how teachers who teach mathematics in school years 1-3 describe their teaching about the phenomenon difference. A further aim was to describe how teachers in school years 1-3 perceive the phenomenon difference. The survey was based on a Learning Study with students in grade 7, where several students perceives of the phenomenon difference was only expressed as magnitude (absolute value). The empirical data collection was conducted through semi-structured qualitative interviews with teachers having a didactic education and teaching in school years 1-3. The data collection was conducted based on phenomenography. The interviews were documented with audio recording and were then transcribed. The transcriptions were needed to make visible what informants described with an eye to their teaching about the mathematical difference. What the informants described was interpreted, analyzed and categorized with the purpose to discern what qualitatively different perceives of the phenomenon difference the informants expressed. Three qualitatively different perceives were discern. These three categories were arranged hierarchically. The result showed that one informant can perceive the same phenomenon difference in several different ways. The result also showed that the majority of the informants initially teach their students with an eye to difference with the strategy to take away, no matter the species to the subtraction task and no matter how the informants perceive the phenomenon. The result cannot claim a generalization when the data collection was conducted only from eight informants. Thus can the result be seen as a *possible* result.

### **Keywords**

Difference, Mathematic Education, Subtraction, Phenomenography, Negative Numbers

# Förord

Den här uppsatsen är viktig för mig av flera anledningar. Innehållet i uppsatsen är ett matematiskt område jag finner intressant. Jag är tacksam att ha fått möjligheten att börja florera i detta spännande område. Det är många i min omgivning som jag vill tacka för att denna uppsats har blivit möjlig. Här kommer endast några få att nämnas. Först och främst vill jag tacka alla informanter som ställt upp på intervjuer. Utan er hade denna uppsats inte blivit möjlig. Jag vill också tacka er rektorer som blivit berörda. Samtliga av er tillfrågade rektorer har ställt er positiva till att jag intervjuat er personal på arbetstid – fantastiskt! Ett stort tack till min handledare Kajsa Falkner för den konstruktiva kritik samt det stöd jag fått under min forskningsprocess. Till sist vill jag också tacka min nuvarande kollega Lotta (Charlotta) Andersson. Hon utmanar ständigt mina tankar under våra samtal i matematikämnets didaktik. Jag får bråka med mina egna tankar och därigenom utvecklas kontinuerligt.

Det är min förhoppning att min uppsats synliggör något som kan komma lärare till gagn i deras dagliga undervisning och därmed även komma elever och deras lärande till del.

Norrtälje den 17 maj 2015

Jane Tuominen

# Innehållsförteckning

<b>Kapitel 1 Bakgrund</b> .....	<b>1</b>
Inledning.....	1
Styrdokument.....	4
Kunskapsområde.....	4
Syfte.....	5
Forskningsfrågor.....	5
<b>Kapitel 2 Teoretiskt perspektiv</b> .....	<b>6</b>
Tidigare forskning.....	6
Centrala begrepp.....	6
<b>Kapitel 3 Metod</b> .....	<b>12</b>
Fenomenografi.....	13
Urval.....	14
Uppläggning och genomförande.....	16
Ytterligare förberedelse.....	17
Intervjuer.....	17
Materialbearbetning.....	18
Tillförlitlighetsfrågor.....	24
Etiska aspekter.....	25
<b>Kapitel 4 Resultat</b> .....	<b>28</b>
Hur beskriver lärarna sin undervisning om fenomenet differens/skillnad?.....	28
Hur uppfattar lärarna fenomenet differens/skillnad?.....	32
Sammanfattning.....	34
Analys av data/empiri.....	34
Hur beskriver lärarna sin undervisning om fenomenet differens/skillnad?.....	34
Hur uppfattar lärarna fenomenet differens/skillnad?.....	37
Sammanfattning.....	39
<b>Kapitel 5 Diskussion</b> .....	<b>41</b>
Hur beskriver lärarna sin undervisning om fenomenet differens/skillnad?.....	41
Hur uppfattar lärarna fenomenet differens/skillnad?.....	45
Slutsatser.....	46
Betydelse.....	47
Reflektion över forskningsprocessen.....	47
Nya frågor/vidare forskning.....	50
<b>Referenser</b> .....	<b>52</b>
<b>Bilagor</b> .....	<b>56</b>

# Kapitel 1 Bakgrund

## Inledning

Matematik är ett ofta debatterat ämne då vi i Sverige över tid har visat sjunkande resultat vid olika mätningar och undersökningar som exempelvis PISA<sup>1</sup> och TIMSS<sup>2</sup> 2007 och 2011.

Matematikundervisning befinner sig i en svårare position än andra discipliner, exempelvis beträffande symboliska redskap. Då allt inom matematiken grundar sig på ett särskilt symbolspråk är det svårt för elever, men även för lärare, att se skillnad mellan matematiskt innehåll och redskap. Istället för att se redskap inom matematiken som en hjälp för konstruktion av ny kunskap och förståelse betraktar elever redskapen som lösa delar av matematikinnehållet (Kinard & Kozulin, 2012).

Inom matematiken finns en inbyggd struktur. Begrepp och färdigheter synliggörs med hjälp av en didaktisk ämnesanalys (Löwing, föreläsning, 20 april, 2015).

På det sätt lärare använder ett korrekt matematiskt språk samt på vilka sätt lärare undervisar och använder generaliserbara förklaringsmodeller är avgörande för elevers lärande (Ball, Hill & Bass, 2005).

Jag tänker att matematikundervisning generellt är komplext och kräver gedigna ämnesdidaktiska kunskaper. Min uppfattning är att lärare i sin undervisning behöver använda korrekt matematiskt språk och presentera tankeredskap som ger elever förståelse och generaliserbara strategier. Om vi fokuserar endast en del inom matematikområdet och studerar subtraktionsområdet visar ett flertal forskningsstudier att elever upplever subtraktion som ett svårare räknesätt än addition (Ball, 1993; Bentley, 2011; Frisk, 2009; Johansson, 2011; Larsson, 2010; Löwing, 2008; Olteanu & Olteanu, 2012). I Skolverkets rapporter (2008, 2012) från TIMSS 2007 och 2011 bekräftas att svenska elever i årskurs 4 har svårigheter att hantera subtraktion. Sveriges resultat ligger, i genomsnitt, under den nivå övriga EU/OECD-länder presterat under både 2007 och 2011. I TIMSS 2007 fanns en uppgift där elever i årskurs 4 skulle göra en jämförelse mellan tal som kunde leda till, två på varandra följande, subtraktioner. (Uppgiften kunde även beräknas på andra sätt.) 24,3 % av svenska elever uppvisade en korrekt lösning. Jämförelsesituationer kan vara svåra för elever att beräkna om de inte har mött sådana uppgifter frekvent i undervisningen (Fuson, 1992). I TIMSS 2011 fanns en subtraktionsuppgift där eleverna i årskurs 4 skulle fylla i den andra termen, subtrahenden, i en subtraktionsuppgift med en kontext. 82,8 % av Sveriges elever beräknade uppgiften korrekt och 84,5 % av elever i övriga EU/OECD-länder beräknade subtraktionsuppgiften korrekt.

Ytterligare aspekter av svårigheter uppkommer då elever ska subtrahera med negativa tal (Altiparmak & Özdoan, 2010; Ball, 1993; Bruno & Martínón, 1999; Karlsson & Kilborn, 2014; Kilhamn, 2011; Kullberg, 2010; Marton & Runesson, 2015).

---

<sup>1</sup> PISA är en förkortning för Programme for International Student Assessment och är ett OECD-projekt. I PISA deltar både OECD-länder och icke OECD-länder. PISA-undersökningar görs vart tredje år av femtonåriga elever i ämnena läsförståelse, matematik och naturvetenskap.

<sup>2</sup> TIMSS är en förkortning för Trends in International Mathematics and Science Study och är en internationell studie som vart fjärde år undersöker elevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i årskurserna 4 och 8.

Under min tid som lågstadielärare har jag många gånger funderat över om de matematiska modeller (tankeredskap) och strategier, som jag har undervisat mina elever om, har varit generaliserbara modeller och strategier. Fungerar exempelvis tallinjen som modell då elever senare under sin skoltid ska beräkna subtraktionsuppgifter med negativa tal?

Som skolutvecklare har jag, bland andra uppdrag och tillsammans med min nuvarande kollega, uppdraget att handleda lärare då de beforskar sin egen undervisning. Vår roll som externt stöd är bland annat att ställa fördjupande och utmanande frågor inom det ämnesdidaktiska innehållet. Tillsammans med lärare utvecklar vi deras undervisning med hjälp av skolutvecklingsmodellen Learning Study. Lärarna och vi funderar tillsammans på hur vi kan möjliggöra för elever att urskilja och lära nytt och erövra ett utvecklat kunnande i ämnet matematik. Learning Study kan beskrivas som en utvecklingsmodell med en iterativ process utvecklad av Ference Marton och Mun Ling Lo. I en Learning Study arbetar cirka tre till fem lärare tillsammans för att planera, utvärdera och revidera sin undervisning. Ett lärandeobjekt formuleras i relation till lärandemål, undervisningens innehåll samt vad elever kan om lärandeobjektet. Lärandeobjektet ska vara väl avgränsat. Det valda lärandeobjektet är något som ofta utgör särskilda svårigheter för lärare då de ska möjliggöra lärande för elever. Ett exempel på ett lärandeobjekt kan vara likhetstecknets innebörd och användning. En så kallad innehållsanalys om lärandeobjektet görs utifrån lärarnas egna erfarenheter, tentativa (preliminära) kritiska aspekter, tidigare forskning i ämnesdidaktik för aktuellt lärandeobjekt samt resultat från eventuella tidigare Learning Studies om lärandeobjektet. Allt detta tas i beaktning då förtest och planering konstrueras. Med hjälp av ett förtest tar lärare reda på vad eleverna redan kan om lärandeobjektet. Kritiska aspekter är det elever behöver urskilja för att erövra ett kunnande utifrån lärandeobjektet. Lärarna planerar en försökslektion eller ett lärtillfälle tillsammans utifrån resultatet på förtestet, kritiska aspekter och fokuserar på lärandeobjektet. Därefter genomförs en försökslektion eller ett lärtillfälle för en elevgrupp. Marton et al. (2015) menar att lärare först behöver ställa frågan *vad* som ska läras innan de ställer frågan *hur* det ska läras och undervisas. Försökslektionen filmas, observeras och utvärderas bland annat genom att eleverna genomför ett eftertest i nära anslutning till försökslektionen. Eftertestets resultat och försökslektionen analyseras. Därefter revideras planeringen för möjliga förbättringar för kommande försökslektion, vilken genomförs med en ny elevgrupp. I en Learning Study används en teori om lärande, exempelvis variationsteorin, vilket skiljer Learning Study från Lesson Study.<sup>3</sup> Learning Study blev ursprungligen en plattform för att lärare skulle kunna börja använda variationsteorin praktiskt (Lo, 2012).

A learning study is simply a study of the relationship between learning and the conditions of learning, carried out by a group of teachers, with the double aim of boosting the participating teachers' ability to help their students to learn, on the one hand, and to produce new insights into learning and teaching that can also be shared with teachers who do not participate in the study, on the other hand (Marton et al., 2015, s. 104).

Under läsåret 2011-2012 handledde jag en Learning Study om subtraktion i årskurs 1 (Modenius, Prestor & Tanner, 2012).<sup>4</sup> Lärarna i den studien upplevde att elever i årskurserna 1-3 enbart använder strategin *ta bort* oavsett subtraktionsuppgifters art. Då elever opererar med subtraktionsuppgifter som exempelvis  $51 - 49 =$  eller  $51 - 2 =$  använder de enbart strategin *ta bort*. När lärarna tidigare granskat sina läromedel (oftast läroböcker) hade de funnit aspekten *skillnad (jämföra)* först i läroböcker ämnade

---

<sup>3</sup> Jag har valt att inte beskriva variationsteorin i denna uppsats.

<sup>4</sup> Studien finns publicerad på <http://ls.idpp.gu.se/> med titeln *Två av subtraktionens aspekter – Jämföra och ta bort*.

för årskurs 3.<sup>5</sup> Under denna Learning Study kontrasterades aspekten och strategin *ta bort* med aspekten *skillnad* (*jämföra*) och därmed med strategin *komplettera*. Strategin *ta bort* tycks vara vanligast förekommande även i andra länders läroböcker och det tycks också som det är vanligast att lärare endast undervisar om subtraktion i kontexter då strategin *ta bort* gäller (Murdiyani, Zulkardi, Ilma, van Erde & van Galen, 2013). Under denna Learning Study gavs eleverna möjlighet att få syn på vilken strategi som kan vara lämplig för respektive subtraktionsuppgift (om talen förhåller sig nära varandra eller långt ifrån varandra, ur ordinalitetsperspektiv). Det eleverna däremot inte gavs möjlighet att få syn på var att differens/skillnad har *både* magnitud (absolutbelopp) och värde.

Den *här* undersökningen gör avstamp utifrån tre av de Learning Studies jag handlett, men framför allt utifrån en upptäckt som gjordes i en Learning Study då en elev uttryckte *Men skillnaden mellan fem och åtta är ju tre*. Subtraktionsuppgiften som eleven uttalade sig om var  $5 - 8 =$ . Studien gjordes i årskurs 7 och lärandeobjektet rörde sig inom att subtrahera med negativa tal (Gustafsson, Lindgren & Weiler, 2013).<sup>6</sup> En stor andel av eleverna hade ”lösningen” ”3” på nämnd subtraktionsuppgift.<sup>7</sup> Elever i studien uppfattade differens/skillnad enbart som magnitud (absolutbelopp), avstånd, en sträcka oavsett startpunkt. Elever som tänkte att skillnaden mellan talen 5 och 8 i nämnd subtraktionsuppgift är 3 har inte urskiljt att riktningen är viktig då subtraktionsuppgifter beräknas. Riktningen anger värdet på differensen. Möjligen kan elever även ha tänkt ”störst först”, det vill säga, de bytte plats på minuenden och subtrahenden så att subtraktionsuppgiften istället blev  $8 - 5 =$ . Om elever har tänkt utifrån ”störst först” kan de ha beräknat uppgiften med strategin *ta bort* eller *komplettera*. Tar elever bort 5 från 8 är differensen 3. Om elever har använt strategin *komplettera* har de utgått från talet 5 och funnit differensen 3 genom att ”förflytta” sig till talet 8. Uttalandet som en elev gjorde har väckt mitt intresse att undersöka vidare om hur elever kan ha uppfattningen att differensen i en uppgift som  $5 - 8 =$  är ”3”. Både elever i årskurs 1 som deltog i tidigare nämnd Learning Study och elever i årskurs 7 i här nämnd Learning Study kan möjligen uppfatta differens/skillnad som *endast* magnitud.

I den *här* undersökningen har jag valt att fokusera *lärare* och *deras* uppfattningar av fenomenet differens/skillnad.

Tal utan tecken (positiva tal) har endast en storlek då magnitud och värde smälter samman (Kilhamn, 2011; Kullberg, 2010). Det innebär att elever i grundskolans årskurser 1-3 kan beräkna subtraktionsuppgifter utan förståelse för att tal har *både* magnitud och värde om det inte lyfts fram i den inledande undervisningen. Om elever i den inledande undervisningen i matematik inte ges möjlighet att urskilja att tal har både magnitud och värde kan de senare under sin skolgång få ”lösningar” i subtraktionsuppgifter som exempelvis  $5 - 8 =$  som ”3”.

Utifrån egen erfarenhet, det Ball (1993), Bentley (2011), Frisk (2009), Johansson (2011), Larsson (2010), Löwing (2008) och Olteanu et al. (2012) lyfter fram angående att elever upplever subtraktion som svårare än addition, resultat från Skolverkets rapporter (2008, 2012) samt det Altiparmak et al. (2010), Ball (1993), Bruno et al. (1999), Karlsson et al. (2014), Kilhamn (2011), Kullberg (2010) och

---

<sup>5</sup> ”Skillnad” är det begrepp som, lärarna i studien, uppfattat som oftast förekommande i läroböcker för elever i årskurserna 1-3 för att definiera ”lösningen” vid subtraktion samt för att definiera en strategi vid subtraktionsuppgifter som exempelvis  $51 - 49 =$ .

<sup>6</sup> Studien är vid dags dato inte ännu publicerad, men kommer att publiceras med titeln *Att operera med negativa tal* på <http://ls.idpp.gu.se/>.

<sup>7</sup> I uppsatsen används begreppet ”lösningen” då differens eller summa avses. Detta begrepp använder jag inte vanligtvis och rekommenderar inte att det används i undervisningen. Jag finner dock att det kan vara lämpligt att använda i uppsatsen.

Marton et al. (2015) lyfter fram beträffande negativa tal finner jag stöd för samt ett behov av att undersöka subtraktionsområdet vidare.

Min ambition är att sätta in läsaren i fenomenet differens/skillnad genom att beskriva forskning om undervisning inom subtraktion med positiva tal likväl som med negativa tal. Innehållet i *Inledningen* leder mig vidare till mina forskningsfrågor och de syften som ligger till grund för min undersökning.

## Styrdokument

I vårt nuvarande styrdokument *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011* i kursplanen för matematik framgår av syftestexten att det är fem ämnesspecifika förmågor som eleverna ska ges möjlighet att utveckla under hela sin tid i grundskolan. I det *Centrala innehållet* och *Taluppfattning och tals användning* finns en stor mängd som berör subtraktionsområdet. För årskurserna 1-3 ingår inte negativa tal i det *Centrala innehållet*.

Genom undervisningen ska eleverna ges förutsättningar att utveckla förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp och metoder och deras användbarhet.

[...]

Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar förmågan att argumentera logiskt och föra matematiska resonemang. Eleverna ska genom undervisningen också ges möjlighet att utveckla en förtrogenhet med matematikens uttrycksformer och hur dessa kan användas för att kommunicera om matematik i vardagliga och matematiska sammanhang (Skolverket, 2011, s. 62).

## Kunskapsområde

Löwing (föreläsning, 20 april, 2015; mejlkommunikation, 1 maj, 2015) redovisade resultat för lösningsfrekvensen för elever i grundskolans årskurser 1 och 2 angående subtraktionsuppgifter i diagnosmaterielet *Diamants* första diagnos i aritmetik, AG1.<sup>8</sup> Resultatet är en del av undersökningar som Löwing har gjort med cirka 5000 elever i grundskolans årskurser 1-9 och redovisas i Tabell 1.

**Tabell 1. Resultat från Diamantdiagnosen AG1.**

Uppgift	$9 - 1 =, 8 - 2 =$	$9 - 4 =, 8 - 4 =$	$4 + \_ = 9$	$8 = 2 + \_$
Årskurs				
Åk 1	62 %	45 %	32 %	20 %
Åk 2	74 %	58 %	46 %	29 %

Resultatet visar att elever i grundskolans första årskurser uppvisar svårigheter att beräkna grundläggande subtraktionsuppgifter. Då lösningsfrekvensen är så låg för uppgifter som  $8 = 2 + \_$  kan en tolkning vara att elever inte getts möjlighet att möta uppgifter skrivna på detta sätt. En annan tolkning kan vara att elever inte getts möjlighet att se samband mellan de två räknesätten addition och subtraktion. I tabellen finns två additionsuppgifter med. Den första additionsuppgiften kan exempelvis beräknas som  $9 - 4 =$  genom att använda strategin *ta bort* eller genom att använda strategin *komplettera*. Den andra additionsuppgiften kan ses som lämplig att beräknas utifrån strategin *ta bort*. Uppgifterna efterfrågar därmed sambanden mellan de båda räknesätten addition och subtraktion.

<sup>8</sup> *Diagnosmaterielet Diamant är reviderat 2013 av Bennet, Fredriksson, Frisk & Löwing. Referensen finns med under Referenser som en länk.*



Elever behöver uppfatta att tal har både magnitud och värde. Det innebär att tal även har en riktning. Då elever beräknar subtraktionsuppgifter med negativa tal är det helt avgörande att elever gets möjlighet att uppfatta att tal har både magnitud och värde för att de ska kunna hantera sådana subtraktionsuppgifter (Altiparmak et al., 2010; Ball, 1993; Kilhamn, 2011; Kullberg, 2010).

En aspekt angående svårigheter att subtrahera med negativa tal kan vara att vi använder olika modeller och metaforer för olika uppgifter. Kilhamn (2011) och Kullberg (2010) påvisar att modeller eller metaforer som exempelvis tallinje eller termometer inte är generaliserbara modeller eller metaforer. De kan snarare bidra till svårigheter för elever då de ska operera med negativa tal än att underlätta (Bruno et al., 1999; Kilhamn, 2011). Om elever inte får veta dessa modellers eller metaforers begränsningar kan de vara ett hinder och skapa svårigheter och därmed inte bidra till förståelse då elever ska beräkna subtraktionsuppgifter som exempelvis  $-5 - (-8) =$  (Kilhamn, 2011; Kullberg, 2010).

Ball (1993) menar att olika modeller kan vara funktionella vid olika beräkningar, beroende på talen och räknesättet i uppgifter. Lärare behöver kunskaper i ämnet för att veta när respektive modell fungerar och är lämplig (ibid.). För att elever ska kunna använda tallinjen för sitt lärande i matematik måste de få undervisning om på vilket sätt tallinjen kan användas (Kilhamn, 2014). Om vi arbetar med tal och tals egenskaper som ordning, sträcka eller avstånd, rörelse eller förändring på tallinjen blir tals egenskaper synliga för elever. Dessa egenskaper är viktiga komplement till tal som antal (Kilhamn, 2014).

Det finns med andra ord mycket forskning och undersökningar som visar att subtraktion uppfattas som ett svårt matematiskt område av elever.

## Syfte

Syftet med undersökningen är att belysa hur lärarna, som undervisar i matematik i grundskolans årskurser 1-3, beskriver sin undervisning om fenomenet differens/skillnad. Ett ytterligare syfte med undersökningen är att beskriva vilka kvalitativt skilda uppfattningar lärare, som undervisar i matematik i grundskolans årskurser 1-3, har av fenomenet differens/skillnad.

## Forskningsfrågor

För att nå studiens syfte formuleras följande forskningsfrågor:

- Hur beskriver lärarna, som undervisar i matematik i grundskolans årskurser 1-3, sin undervisning om fenomenet differens/skillnad?
- Hur uppfattar lärarna, som undervisar i matematik i grundskolans årskurser 1-3, fenomenet differens/skillnad?

# Kapitel 2 Teoretiskt perspektiv

Detta kapitel kommer att inledas med en beskrivning över hur jag funnit tidigare forskning inom subtraktionsområdet och differens/skillnad. Vidare kommer centrala begrepp, relevant litteratur och tidigare forskning inom området att beskrivas och lyftas fram.

## Tidigare forskning

För att finna tidigare forskning beträffande undersökningens forskningsfrågor och syften har jag tagit del av referenslistor i artiklar, avhandlingar och ämnesdidaktisk litteratur inom subtraktionsområdet och fenomenet differens/skillnad. Det har varit litteratur som jag känt till sedan tidigare, men jag har kompletterat detta och även sökt i avhandlingar.se, DiVA, <http://www.diva-portal.org> Libris, <http://libris.kb.se>, Google Scholar, <http://scholar.google.se> samt genom Stockholms universitets bibliotek (SUB) och på så sätt fått tillgång till sökmotorer som bland andra EBSCO Discovery Service (EDS). Mina sökord har varit differens, skillnad, matematik, matematikundervisning, negativa tal och subtraktion såväl på engelska som svenska. Jag har medvetet valt att söka i olika sökmotorer även om jag har kunnat ta del av andras referenslistor. Risken med att endast läsa andras referenslistor skulle kunna ha inneburit att jag hamnat i en mer eller mindre sluten krets där olika forskare och författare refererar till varandra. Jag har noterat att jag genom att använda olika sökmotorer fått tillgång till väldigt mycket forskning inom mitt valda område, forskning som jag inte tagit del av tidigare.

## Centrala begrepp

### Begrepp och regler

Begreppet *subtrahera* kommer från det latinska verbet *subtrahere* och betyder *dra undan*. Begreppet *subtraktion* kommer från det latinska substantivet *subtractio*. Subtraktion kan definieras som en operation inom aritmetik som innebär att ett tal eller uttryck dras ifrån ett annat tal eller uttryck (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Resultatet av en subtraktion kallas *differens* eller *skillnad*. Begreppet *differens* kommer från det latinska *differentia* och betyder *olikhet* eller *skillnad* (Kiselman et al., 2008). Generellt handlar subtraktion om *differens* där subtraktionen  $x = a - b$ , har innebörden  $b + x = a$  och  $x$  är avståndet från  $b$  till  $a$  (Karlsson & Kilborn, 2014). I uttrycket  $a - b$  benämns  $a$  som *minuend* och  $b$  som *subtrahend*. Både  $a$  och  $b$  kan även benämnas som *termer* (Kiselman et al., 2008). I en del andra länder används endast begreppen *minuend* för den första termen och *subtrahend* för den andra termen (Ball et al., 2005; Ma, 1999).

Enligt Ma (1999) och Kullberg (2010) behöver elever veta att den *kommutativa lagen*, som gäller för addition, inte gäller för subtraktion. *Kommutativ* kommer från latinets *commutativus* och betyder *som kan bytas om*. Lagen innebär för addition att  $a + b = b + a$  (Kiselman et al., 2008). Bevis på att den kommutativa lagen gäller för addition ser vi med exemplet  $8 + 5 = 5 + 8$ . Termerna kan byta plats utan att det påverkar ”lösningen”. I addition kan de båda termerna även benämnas som addender. För subtraktion gäller inte den kommutativa lagen och därmed kan inte minuend och subtrahend byta plats. Minuenden har en given plats likväl som subtrahenden. Subtraktion är med andra ord ett antikommutativt räknesätt då  $8 - 5 \neq 5 - 8$  (ibid.).

Kinesiska lärare uttrycker inte den kommutativa lagen som att ”det spelar ingen roll” i vilken ordning du adderar addenderna. Istället uttrycker sig de kinesiska lärarna som att när du adderar två addender och byter plats på dem kommer summan fortfarande att vara densamma (Ma, 1999). Kinesiska lärare menar att frågan *Varför är det logiskt?* är den första språngbrädan för begreppslig förståelse i matematik. Att utforska det *varför* som ligger bakom det *hur* leder steg för steg till de grundläggande idéerna i matematikens kärna (ibid.).

En annan räknelag som gäller för addition, men inte för subtraktion är den *associativa lagen*. *Associativ* kommer ursprungligen från det latinska verbet *associare* och betyder *att förena* eller *att sammanföra*. Lagen innebär för addition att  $(a + b) + c = a + (b + c)$ . Exemplet  $(8 + 5) + 3 = 8 + (5 + 3)$  kan bevisa lagen. För subtraktion ser vi att  $(a - b) - c \neq a - (b - c)$  med exemplet  $(8 - 5) - 3 \neq 8 - (5 - 3)$  (Kiselman et al., 2008). Räknelagar och regler måste lyftas in i den grundläggande undervisningen (Löwing, föreläsning, 20 april, 2015).

Det positiva talet 8 skrivs utan tecken, men har innebörden +8. Det positiva talet 8 har ett *värde* på +8. Det motsatta talet till +8 är -8 och skrivs med ett minustecken för att vi ska veta att det är det motsatta talet (det negativa talet 8) till det positiva talet 8. *Magnituden* för de båda talen är 8. Magnituden anger en storlek. Minustecknet framför 8 anger att det är ett negativt tal. Minustecknet anger därmed ett *värde* på det negativa talet. När vi skriver positiva tal tar vi för givet att elever vet att det egentligen kan stå +8. 8 i talet -8 anger storleken på exempelvis en skuld. 8 i talet +8 anger storleken på exempelvis pengar som finns på kontot att spendera. Då vi inte skriver ut tecken på positiva tal smälter storlek och värde samman (Kilhamn, 2011; Kullberg, 2010).

Karlsson et al. (2014) nämner en regel för subtraktion: En subtraktion av ett helt tal kan alltid ersättas med en addition av det motsatta talet, men även det omvända gäller, det vill säga, att en addition av ett helt tal kan ersättas med en subtraktion av det motsatta talet. Regeln för subtraktion kan ersätta den förvirrande regeln att ”lika tecken ger plus” (ibid.). Ett exempel på regeln skulle kunna vara att för uttrycket  $8 - (-5)$  gäller  $8 + 5$  då subtraktionen ersätts med addition och det negativa talet (-5) ersätts med dess motsatta tal, det positiva talet +5. Vanligtvis sätter vi inte ut signum för positiva tal. ”Plustecknet” i uttrycket  $8 + 5$  står därmed för räknesättet addition (ibid.). Löwing (föreläsning, 20 april, 2015) menar att elever måste ges möjlighet att se sambanden i matematik.

### **Subtraktion och aspekter**

Att elever upplever subtraktion som ett svårare räknesätt än addition kan bero på att subtraktion uppvisar olika aspekter, kan beräknas på olika sätt och förekommer vid flera olika typer av situationer i vardagen (Frisk, 2009; Larsson, 2010; Löwing, 2008). De tre aspekterna av subtraktion kan uppfattas som *ta bort*, *komplettera* samt *jämföra* (Frisk, 2009; Karlsson et al., 2014; Larsson, 2010; Löwing, 2008). De två första aspekterna *ta bort* respektive *komplettera* är dessutom strategier för att operera i subtraktion. Strategin *ta bort* är en dynamisk operation och kan exemplifieras med att man har åtta äpplen och ger bort fem äpplen. Kvar har man då tre äpplen. Strategin *komplettera* kan innebära att man har fem äpplen, men vill ha åtta äpplen och därför behöver ytterligare tre äpplen. Aspekten *komplettera* nämns som en strategi för subtraktion, men räknesättet addition används då beräkningar görs utifrån aspekten. Strategin *komplettera* är således en dynamisk operation. Slutligen kan aspekten *jämföra* exemplifieras med att person A har åtta äpplen och person B har fem äpplen. Person A har då tre fler äpplen än person B och person B har tre färre äpplen än person A. *Jämföra* är således en statisk subtraktion. Inget tillkommer eller dras ifrån (Frisk, 2009). Frisk (2009) skriver att beroende på sammanhanget, språket och på det sätt frågan formuleras kommer elever att associera till en viss beräkningsstrategi i subtraktion.

### **Minustecknets olika innebörder**

Minustecknet har olika innebörder. I uttrycket  $8 - (-5)$  har det första minustecknet innebörden av ett operationstecken för subtraktion medan det andra minustecknet är ett signum för ett negativt tal och därmed är det inte ett ”lika” tecken (Karlsson et al., 2014; Kilhamn, 2011; Kullberg, 2010). Genom att benämna uttrycket som ”negativ åtta subtraherat med negativ fem” istället för ”minus åtta minus minus fem” (kan jämföras med engelskans: negative eight minus negative five) möjliggörs det för elever att få syn på vad uttrycket har för innebörd (Ball, 1993; Ball et al., 2005; Kilhamn, 2011; Kullberg, 2010).

### **Negativa tal**

Tidigare forskning visar att vi historiskt haft svårt att acceptera negativa tal och ännu svårare att göra matematiska operationer med negativa tal (Altiparmak et al., 2010; Ball, 1993; Kilhamn, 2011; Kullberg, 2010). Det som är helt avgörande för att elever ska kunna förstå negativa tal och även kunna operera med dem kräver att eleverna uppfattar och tolkar magnitud och riktning hos tal (Altiparmak et al., 2010; Ball, 1993; Kilhamn, 2011; Kullberg, 2010).

Negativa tal är svåra att se som kvantitet av en mängd, som en storlek. De negativa talen refereras ofta som en punkt på tallinjen eller som en skala på termometern (Bentley, 2008). Tal utan tecken har endast en storlek då magnitud och värde smälter samman (Kilhamn, 2011; Kullberg, 2010). Magnitud kan förklaras som ett absolutbelopp och anger en mängd (kardinalitet). Värde anger ett tals värde i förhållande till andra tal (ordinalitet) (Kilhamn, 2011). Att samtidigt förstå att  $-8$  ur en aspekt är mer än (har ett högre värde än)  $-5$  och ur en annan aspekt mindre än (har ett lägre värde än)  $-5$  är det centrala för att förstå negativa tal (Ball, 1993; Kilhamn, 2011). Ball (1993) exemplifierade det med att elever, åtta och nio år gamla, i hennes forskning kunde redogöra att  $-35 < 6$ , men inte att  $-35 < -6$ , vilket även Kilhamn (2011) och Kullberg (2010) lyfter fram beträffande att elever inte kan skilja på magnitud och värde.

När elever beräknar subtraktionsuppgifter då  $a > b$  är det inga problem, men då  $a < b$  uppstår problem om elever endast ser differens/skillnad som ett avstånd, en sträcka, utan riktning (tre enheter lång oavsett startpunkt i detta exempel). Då minuenden har ett högre värde än subtrahenden syns inte elevers uppfattning angående magnitud (absolutbelopp). Exempelvis vid subtraktionsuppgiften  $8 - 5 =$  kan elever få ”lösningen” 3. Skulle subtraktionsuppgiften vara  $5 - 8 =$  och elever ser subtraktionen som ett avstånd utan riktning får de ett felaktigt resultat. Det vill säga återigen skulle elevers ”lösning” vara 3. En sträcka kan inte vara negativ. Avståndet mellan exempelvis två städer är samma antal kilometer, oavsett vilken av städerna som är utgångspunkten (Kilhamn, 2011).

### **Metaforer och modeller**

Altiparmak et al. (2010) och Ball (1993) lyfter fram vikten av att sätta in negativa tal i elevers egen kontext. För att konkretisera uppgifter för elever används ibland metaforer. Då lärare i sin undervisning vill konkretisera uppgifter med subtraktion och negativa tal används ofta metaforer som exempelvis termometer eller exempel med att åka hiss eller modellen (redskapet) tallinje. Lärare talar inte om för elever att metaforer eller modeller har sina begränsningar och att de inte är generaliserbara (Karlsson et al., 2014; Kilhamn, 2011; Kullberg). ”Introducing the negative numbers as the names of points on the number line could not give the pupils an image of the numbers as mathematically abstract objects” (Bentley, 2008, s. 33). I skolans matematik i kontrast till den akademiska matematiken förenklas ofta begrepp. Dessa förenklingar tar avstamp ur såväl den akademiska matematiken som den kognitiva psykologin. Förenklingarna benämns som begreppsmodeller (Bentley, 2008). Det finns tre kriterier som mäter kvaliteten på dessa begreppsmodeller: strukturell giltighet, ekologisk giltighet samt förenkling. Den strukturella giltigheten relateras till hur väl modellen

stämmer överens med den akademiska strukturen. Den ekologiska giltigheten handlar om hur väl förtrogna elever är med den kontext som används. Slutligen handlar förenklingen om hur väl modellen fungerar att operera med (ibid.).

Även Ball (1993), Kilhamn (2011) och Kullberg (2010) lyfter fram att metaforer som exempelvis byggnader med källarplan och hiss har sina begränsningar då elever ska subtrahera med negativa tal. En metafor som exempelvis hiss kan inte användas för att exemplifiera negativa tal och subtraktion ur aspekten *ta bort*. Metaforen ger inte heller förståelse för skillnaden i värde av två negativa tal (Ball, 1993; Kilhamn, 2011; Kullberg, 2010). Är det ett högre värde att vara på källarplan 5 eller källarplan 8? På vilket sätt kan tallinjen användas för att förstå exempelvis subtraktionsuppgiften  $-5 - (-8) = ?$  (Ball, 1993). Ball (1993) menar att olika metaforer synliggör olika aspekter av att subtrahera med negativa tal. I sin forskning med elever åtta och nio år gamla prövade Ball (1993) pengar (skuld) som metafor och såg att pengar (skuld) hade fördelar då hiss inte fungerade som metafor. Vid uppgifter som exempelvis  $5 + (-5)$  kunde det med hjälp av pengar förklaras att du har fem kronor, men ska betala fem kronor. Det fungerade även att visa på relativa kvantiteter som att  $-5$  är mindre (har ett lägre värde) än  $-3$ , men när det med hjälp av pengar skulle bevisas att  $-5$  är en större skuld (har ett högre värde) än  $-3$  blev metaforen skuld inte tydlig för eleverna (ibid.). Ball (1993) upptäckte att eleverna inte kunde använda sig av pengar då de skulle räkna ut vad de hade om de hade fem kronor och en skuld på åtta kronor. Eleverna använde inte ens beräkningar utan de uttryckte sig som att de hade fem kronor *och* en skuld på åtta kronor. Elever uttryckte det som att det inte finns ”negativa pengar” (ibid.). Ball (1993) menar att elever simultant behöver urskilja att  $-5$  kan i en betydelse vara större än  $-3$ , men i en annan betydelse mindre än  $-3$ . Ser vi exempelvis  $-5$  som en skuld så är det en större skuld än  $-3$ . Ser vi  $-5$  som något som finns på ett konto är det mindre på kontot än om vi har  $-3$  på kontot. Elever i studien menade att det inte finns tal med ett lägre värde än talet 0. Elever likställde ibland negativa tal med talet 0. Att vara skyldig någon fem kronor ( $-5$ ) innebär att man inte har några pengar (ibid.).

Bentley (2008) lyfter fram tallinjen som en modell för att exempelvis beräkna subtraktionsuppgifter med både positiva och negativa tal. En utvidgad tillämpning av tallinjen menar Bentley (2008) fungerar med hjälp av *vektorer*. En vektor har både riktning och längd. Riktningen betecknar om talet är positivt eller negativt och längden motsvarar talets magnitud (absolutbelopp). En vektor har en viss längd och en viss riktning, men man tar inte hänsyn till startpunkten (ibid.). Ursprunget till begreppet *vektor* kommer från latinets *vector* och betyder *resande* eller *forslande* (Kiselman et al., 2008). Bentley (2008) menar att det oftast är mer lämpligt att använda endast en modell för att representera ett matematiskt koncept då en del modeller motsäger varandra. Elevers förståelse för de matematiska begreppen beror på hur en modell används i undervisningen. Elevers förståelse för konceptet kommer att relateras till den modell som används (ibid.).

### **Lärares ämnesdidaktiska kunskaper**

Det som kan tyckas vara funktionellt och framgångsrikt på kort sikt och under de första skolåren kan dessvärre leda till större problem senare då kraven på abstraktion höjs samt förståelse av ämnesinnehållet kräver en andra ordningens konkretion. Det innebär att elever måste ges möjlighet att abstrahera det som ska läras och använda ett matematiskt språk så tidigt som möjligt. Detta i sin tur är en förutsättning för att elever ska fördjupa sina kunskaper och komma vidare (Altiparmak et al., 2010; Karlsson et al., 2014).

For example is it fair to say to second-graders that they “cannot take a larger number away from a smaller one” or does concern for mathematical integrity demand an accurate statement (for example, “with the numbers we know now,

we do not have an answer when we subtract a large number from a smaller one“)?  
(Ball, et al., 2005, s. 21)

Ma (1999) menar att ett uttalande som ”det går inte att subtrahera ett tal med högre värde från ett tal med lägre värde” är ett falskt uttalande. Även om elever i de tidigare årskurserna inte opererar med subtraktionsuppgifter där minuenden har ett lägre värde än subtrahenden betyder det inte att sådana operationer är omöjliga. Eleverna kommer att hantera sådana subtraktionsuppgifter i framtiden och därför får vi inte förvirra elever med sådana uttalanden som kan leda till missuppfattningar (ibid.).

Ball et al. (2005) undersökte vad lärare behöver kunna i ämnet matematik för att vara mer lyckosamma för att möjliggöra lärande för elever. Ball et al. (2005) fann i sin undersökning med amerikanska lärare att de lärare som visade ett högre resultat i egna matematikkunskaper lyckades bättre med elevers lärande. Lärare måste också kunna förklara, lyssna, bedöma elevers arbeten och lärare måste välja användbara förklaringsmodeller. Allt detta kräver gedigna ämneskunskaper (ibid.). Lärare måste också lyfta typiska missuppfattningar och måste ha djupa matematiska kunskaper och veta vad elever behöver kunna för att kunna aktuellt matematiskt innehåll. Det krävs både ett matematiskt resonemang och didaktiska kunskaper. Lärare måste kunna sätta sig in i elevens perspektiv och fundera på vad som krävs för den som för första gången ser en matematisk idé (Ball, 1993; Ball et al., 2005). Även vid grundläggande matematikundervisning krävs gedigna ämneskunskaper hos lärare och på det sätt undervisningen sker avgör hur det möjliggörs för elever att lära och förstå ämnet (Ma, 1999). Ma (1999) finner i sin undersökning när hon jämför amerikanska och kinesiska lärare som undervisar i matematik att amerikanska lärare har fler år i sin utbildning än kinesiska lärare. Kinesiska elever har dock bättre resultat i matematik än amerikanska elever. Hur kan denna paradox förklaras? I sin undersökning ville Ma (1999) se om anledningen fanns inne i klassrummet, men utanför studenterna? Kunde lärares kunskaper i ämnet påverka elevers resultat? Skulle det vara så skulle det vara enklare att påverka än orsaker utanför klassrummet eller orsaker hos elever (ibid.). Ma (1999) fann att kinesiska lärare har en djupare förståelse i grundläggande matematik än amerikanska lärare när de börjar som lärare. Subtraktion kräver att lärare har en djupare förståelse för matematik och en djupare förståelse skulle påverka sättet att undervisa och skulle på så vis bidra till elevers lärande (ibid.). Löwing och Kilborn (2002) menar att det är först när läraren själv har förstått matematikämnets karaktär och innehåll samt har goda ämnesdidaktiska kunskaper och sätter detta i relation till hur den enskilda eleven uppfattar matematik i olika situationer som god undervisning uppstår. Vidare lyfter Löwing et al. (2002) fram att det ställer stora krav på läraren då läraren ska ge den enskilde eleven möjlighet att utveckla sin förståelse för det matematiska innehållet. Undervisningsmetoden kommer att anpassas efter lärarens egen förståelse för innehållet (ibid.). ”Teachers are only as good as the methods of teaching they use” (Stigler & Hiebert, 1999, s. 175). Stigler et al. (ibid.) menar att det inte är enskilda skickliga lärare som ska hyllas. Stigler et al. (ibid.) lyfter fram att det är när lärare kommer samman och förbättrar sin undervisning som en kontinuerlig förbättring av undervisningen i klassrummen och av yrket sker.

Bentley (2008) lyfter fram att lärare allmänt inte har nödvändig kunskap för fullständig förståelse för matematiska begrepp och dess innebörder. Detta tycks vara anledningen till lärares dåliga utvecklade kunskap om elevers förståelse av begrepp. Det i sin tur leder till svårigheter att analysera elevers svar. Dessa svårigheter existerar även i mindre komplexa matematiska områden som grundläggande aritmetik (ibid.).

Ball et al. (2005) menar att matematikkunskaper för att kunna undervisa skiljer sig från de matematikkunskaper andra kategorier av yrken behöver. Om lärare har gedigna kunskaper i matematik

och förmågan att undervisa i ämnet kan det hindra att gapet växer för de elever som får kämpa i jämförelse med de elever som redan kan och förstår det aktuella matematiska innehållet (ibid.).

Kinard et al. (2012) lyfter fram att i teknologiskt utvecklade länder som exempelvis Australien, Belgien och Japan har cirka 50 % av lågstadielärarna en högre examen eller specialutbildning i matematik. Ma (1999) menar att långsiktig koherens behöver gälla för de lärare som undervisar de yngsta eleverna för att de ska ges möjlighet att förvärva matematiska kunskaper som är generaliserbara. Lärare som undervisar äldre elever behöver långsiktig koherens för att ha förståelse för den kunskap elever förvärvade under tidigare årskurser (ibid.).

I Skolverkets rapport (2008) från TIMSS 2007 lyfts frågan om att utbilda lärare i matematik. I rapporten uttrycks att utbilda lärare generellt i ämnet kan tyckas som ett för trubbigt instrument. I rapporten framgår att en utbildning som innehåller de specifika områden där elever uppvisar svårigheter förmodligen skulle ge ett bättre resultat för elevers lärande (Skolverket, 2008).

# Kapitel 3 Metod

Fejes och Thornberg (2015) lyfter fram att val av metodansats styr vilken datainsamlingsmetod som väljs. Larsson (1994) menar att det som man kan behöva fundera över i en fenomenografisk studie är val av datainsamlingsmetod. Datainsamlingen i denna undersökning genomfördes via halvstrukturerade kvalitativa intervjuer med ljudupptagningar. Enligt Bentley (2008) transkriberas ljudupptagningar för att underlätta inför analysen. Mina genomförda intervjuer transkriberades, tolkades och analyserades. Analysen gjordes utifrån en fenomenografisk ansats, vilket jag fann lämpligt då jag undersökte lärares uppfattningar av ett fenomen. Larsson (1994) lyfter fram att i fenomenografiska studier studerar man uppfattningar för att det enligt ansatsen är meningsfullt att studera uppfattningar. Utgångspunkten är att man ser på forskning eller inläring på det sätt som ansatsen beskriver (ibid.). En halvstrukturerad kvalitativ intervju har målet att erhålla beskrivningar av informantens sätt att uppfatta världen för att urskilja olika uppfattningar av fenomenet samt att tolka innebörden av beskrivna fenomen (Bentley, 2008; Kvale & Brinkmann, 2014). På det sätt människor erfar olika fenomen sätter det spår på vilka sätt de uttalar sig om fenomenet. Det är inte *vad* informanter säger om ett fenomen utan det är forskarens uppgift att försöka klargöra vilka uppfattningar respektive informants uttalanden vilar på (Eriksson, 1999). Utifrån min undersöknings syften och forskningsfrågor fann jag halvstrukturerade kvalitativa intervjuer som en lämplig metod. Datainsamling utifrån en fenomenografisk ansats består i huvudsak av intervjuer, men även observationer kan göras (Bentley, 2008). I min undersökning valde jag medvetet bort lektionsobservationer på grund av tidsaspekten. Vissa frågor förbereddes i en intervjuguide för att utgöra strukturen för intervjuerna. För att få uttömmande svar på frågor ställdes följdfrågor under intervjuerna. Följdfrågorna ställdes för att respektive informant i varje intervju så väl som möjligt skulle ges möjlighet att beskriva sina uppfattningar av fenomenet differens/skillnad. ”I fenomenografiska studier utgör vanligen transkriberade intervjuer underlag för analyser som eftersträvar kvalitativt olika uppfattningar av det studerade fenomenet” (Eriksson, 1999, s. 28). Utifrån vad informanterna i denna undersökning beskrev om sin undervisning om fenomenet differens/skillnad tolkades och analyserades de transkriberade beskrivningarna. När man gör en kvalitativ analys är man inte fördomsfri utan försöker utnyttja alla perspektiv som man har tillgång till som tolkningsmöjligheter (Larsson, 1986). På grund av detta är det viktigt att man skaffar sig eller redan har förtrogenhet med det eller de fenomen som ska analyseras (ibid.). Kvalitativt skilda uppfattningar av fenomenet differens/skillnad urskiljdes utifrån vad informanterna beskrev om sin undervisning. Olika beskrivningar och uttalanden jämfördes för att finna kvalitativa likheter och skillnader. Skilda mönster av *möjliga* uppfattningar tolkades fram och avgränsades. Utfallsrummet visade kategorier med kvalitativt skilda uppfattningar. Kategoriseringen anger diskreta värden, vilket innebär att det är steg mellan varje kategori. Stegen mellan de hierarkiskt skilda nivåerna utgör kritiska aspekter. För att kunna uppfatta och förstå en högre hierarkisk nivå och kategori behöver något urskiljas och uppfattas. Enligt Bentley (2008) begränsas kategoriseringen av forskarens ämneskunskaper.

Då det endast är jag ensam som analyserade och tolkade de transkriberade intervjuerna hänvisas resultatet helt och hållet till huruvida mina egna uppfattningar har tagits med eller inte. Larsson (1986) lyfter fram att det inte är möjligt att göra tolkningsarbetet och analysen mekaniskt. Tolknningen är



hänvisad till ett tolkande subjekt. En oberoende bedömare utgår från de kategorier som forskaren redan konstruerat. Utifrån intervjuerna fördelar den oberoende bedömaren enbart de svar som stämmer in på redan givna kategorier. Det innebär att det fortfarande kvarstår osäkerhet huruvida forskaren kategoriserat på ett lämpligt sätt eller om det skulle vara möjligt att utveckla kategorierna ytterligare. Det som återstår är därmed läsarens förtroende till forskaren (ibid.). Fejes et al. (2015) lyfter fram att utmaningar vid kvalitativa analyser är att skapa mening ur en mängd data. Det som är betydelsefullt ska skiljas ut från det som är trivialt och betydelsefulla mönster ska identifieras (ibid.). I denna undersökning var det jag som var det tolkande subjektet. För att öka reliabiliteten kunde en oberoende bedömare ha analyserat och tolkat materialet.

Kontrasteras en kvalitativ metod med andra metoder utgår andra metoder från i förhand givna kategorier (Larsson, 1986; Starrin & Renck, 1996). Kategorierna i en kvalitativ metod bör ha en tydlig relation till det fenomen som undersöks samt en logisk relation till varandra. Denna relation är ofta hierarkisk (Marton & Booth, 2000). Att de olika kategorierna kan ordnas hierarkiskt innebär att olika kvaliteter kan urskiljas i olika uppfattningar. För att uppfatta en hierarkiskt överordnad kategori behöver fler aspekter urskiljas (ibid.).

I fenomenografiska studier illustreras olika kategorier med hjälp av citat (Larsson, 1986). För att ge en god bild av en kategori kan två citat finnas med. Ett citat som tydligt beskriver kategorin och meningen med det är att ge en djupare förståelse för kategorin samt ett citat som är mindre tydligt. Detta ger en tydligare bild var gränsen för kategorin är. Det ger också läsaren en möjlighet att vara kritisk till kategoriseringen (ibid.). I denna uppsats finns ibland endast ett citat med för att exemplifiera respektive kategori och ibland fler citat än två. Det kan innebära att gränsen för vad kategorin är tycks mer otydlig.

Inom fenomenografi kan skilda uppfattningar beskrivas som ett antal sidoordnade kategorier. Det kan även förekomma att kategorierna har en hierarkisk ordning där uppfattningar är underordnade andra uppfattningar. Ett fundamentalt krav är att det finns en god struktur och att uppfattningarna är relaterade till samma fenomen (Larsson, 1994). I denna uppsats presenteras kategorier i en hierarkisk ordning utan sidoordnade kategorier. Under respektive kategori ges en kort beskrivning av kategorin. Beskrivningarna sammanställdes utifrån hur informanterna samtalade om sin undervisning om fenomenet differens/skillnad samt hur dessa uttalanden tolkades och analyserades. Då kategorierna sammanställdes togs även hänsyn till hur informanterna samtalade om subtraktionsuppgifterna  $8 - 5 =$  och  $5 - 8 =$ . Det togs även hänsyn till tidigare forskning då kategorierna beskrevs. Kategorierna och den hierarkiska ordningen presenteras under rubriken *Materialbearbetning*.

## Fenomenografi

Fenomenografi är inte en teori utan en ansats och den kan ses som en avlägsen släkting till fenomenologin (Marton et al., 2000). Inom fenomenografi utforskar forskaren andra människors erfarenanden genom att reflektera över dem (Marton et al., 2000). Fenomenografien har inte utformats inom en uttalad teoretisk referensram eller till en bestämd filosofisk idétradition. Fenomenografien är empiriskt utprövad (Alexandersson, 1994). Utgångspunkten inom fenomenografien är för det första att människor uppfattar omvärlden på olika sätt och för det andra att det finns ett begränsat antal på vilka sätt fenomen kan uppfattas (Dahlgren & Johansson, 2015; Marton, 1981).

Ference Marton ses som en av upphovsmännen till fenomenografien (Eriksson, 1999). I Marton et al., (2000) beskrivs fenomenografien som en ansats för att identifiera, formulera och hantera vissa typer av

forskningsfrågor som är relevanta för lärande och förståelse i pedagogiska miljöer. Ansatsen skiljer på första och andra ordningens perspektiv och inom fenomenografien intas en andra ordningens perspektiv. Första ordningens perspektiv kan förklaras som att det görs uttalanden om fenomenen och världen så som det är. Sätten att erfara fenomen och världen tas för givna och man är inte medveten om dem. Andra ordningens perspektiv innebär att det som ligger till grund för de sätt fenomen och världen erfars är föremål för forskning (Larsson, 1986; Marton et al., 2000).

Den fenomenografiska ansatsen innehåller teoretiska antaganden om kunskap, om förändringar om kunskap samt om den lärande människans förhållande till omvärlden (Larsson, 1986). Det handlar om olika sätt att uppfatta situationer och fenomen på de olika sätt världen omkring oss erfars och uppfattas (Marton, 2015). Synen på inläring och synen på vetenskaplig kunskap har gemensamma drag och får därmed konsekvenser för ansatsen (ibid.).

Fenomenografien har ett epistemologiskt antagande där lärande ses som att få förmågan att erfara världen på ett eller annat sätt (Marton & Booth, 1997). Det innebär att världen inte konstrueras av den lärande. Världen finns där, men det är den värld vi erfar och lever i, som är vår (Marton et al., 1997). Epistemologi är filosofin om kunskap, vad kunskap är och på vilket sätt kunskap erhålls (Kvale et al., 2014). I Gustavsson (2002) översätts *episteme* som vetenskaplig-teoretisk kunskap och kontrasteras dels med *techne*, praktisk-produktiv kunskap och dels med *fronesis*, praktisk klokhet, enligt Aristoteles sätt att uppdelas kunskap. Jag uppfattar att det inom fenomenografi inte ses på kunskap på detta indelade sätt utan som en förmåga att urskilja ett fenomen på kvalitativt skilda sätt.

Forskningens objekt är variationen av hur fenomen erfars (Marton et al., 2000). I Marton et al. (2000) kontrasteras individuell konstruktivism med social konstruktivism som två spegelbilder av varandra och det påpekas att de båda perspektiven skiljer på ”det inre” och ”det yttre”. Skiljelinjen mellan ”det inre” och ”det yttre” försvinner inom den fenomenografiska ansatsen. Det är inte två olika ting där det ena förutsätter det andra för att förklara varandra. Det är inte en subjektiv värld ”där inne” och en verklig värld ”där ute”. Det finns bara en värld, en värld som vi erfar, en värld som vi lever i, en värld som är vår (Marton et al., 1997). ”One should not, and we do not, consider person and world as being separated” (Marton et al., 1997, s. 12-13). Fenomenografins ontologiska antagande är därmed icke-dualistiskt då det inte görs någon skillnad på uppfattningen eller uppfattningens innehåll, med andra ord, subjekt och objekt är oskiljbara (Marton et al., 1997). Verkligheten existerar, men verklighetens betydelse konstitueras på det sätt jag, som enskild individ, uppfattar den. Exempelvis skulle inte landskap och djur försvinna om mänskligheten försvann, men vårt sätt att beskriva landskap och djur är beroende av på det sätt vi uppfattar dessa fenomen. Vi kan därmed inte skilja beskrivningen från den som beskriver det uppfattade fenomenet (Marton et al., 2000). I fenomenografien är det variationer i uppfattningar snarare än likheter som uppmärksammas (Dahlgren et al., 2015). Uljens (1998) lyfter fram den paradoxala konsekvensen av den icke-dualistiska ontologin. Huruvida forskaren utifrån en fenomenografisk ansats kan beskriva en annan persons uppfattningar är en paradox att ta hänsyn till då forskaren enbart kan beskriva hur *denne* uppfattar en annan individs uppfattningar (ibid.).

## Urval

Urvalet av informanter gjordes utifrån undersökningens syften och forskningsfrågor. Utifrån dessa var urvalet av informanter ett målstyrt urval (purposive sampling) och inte ett slumpmässigt urval (Bryman, 2011). Urvalet skedde därför bland lärare med didaktisk utbildning i matematik och som undervisar i matematik i grundskolans årskurser 1-3. Motiveringen till ett målstyrt urval grundades

utifrån att jag önskade informanter som var relevanta för undersökningens forskningsfrågor samt för att erhålla det antal informanter som behövdes för undersökningen. Med tanke på tidsramen för undersökningen togs även hänsyn till att informanterna fanns geografiskt nära mig som forskare och intervjuare. Utifrån den geografiska närheten valdes skolor och rektorer ut. I urvalet av informanter togs hänsyn till att det inte fanns någon nära relation mellan mig och de informanter som tillfrågades för intervjuer.

Åtta informanter från fem olika skolor intervjuades. Fördelningen av antal informanter per skola visas i Tabell 2.

**Tabell 2. Fördelning av antal informanter på respektive skola.**

<i>Skolor</i>	<i>Skola 1</i>	<i>Skola 2</i>	<i>Skola 3</i>	<i>Skola 4</i>	<i>Skola 5</i>
<b>Antal informanter/skola</b>	2	2	1	1	2

Informanterna som deltog i intervjuer har undervisat olika antal år från och med fyra år till och med fyrtioett år. Fler informanter än åtta stycken fanns att tillgå och även fler skolor om eventuellt bortfall skulle ha förekommit. För mig, okänd anledning, valde ett flertal lärare att inte besvara förfrågan om att delta på intervju för min undersökning. Dessa lärare erhöll inte någon påminnelse då tillräckligt antal informanter fanns för undersökningen. Därmed skedde ett indirekt urval bland tillfrågade lärare.

De valda citaten i uppsatsen har jag på något sätt ansett vara relevanta för undersökningens resultat och för innehållet i uppsatsen. Citaten kan vara relaterade till forskningsfrågorna och syftena, beskrivningar av urskiljda kategorier eller för att förtydliga innehållet i texten. I citaten benämns informanterna utifrån kodningen *Lärare I*, *Lärare II* etcetera.<sup>9</sup> Då intervjuaren citerades användes kodningen *I*.

Ett medvetet urval skedde av de matematikuppgifter som lyftes fram under intervjuerna. Det var ensiffriga tal i två subtraktionsuppgifter då jag ämnade avgränsa fokusområdet mot uppfattningar av differens/skillnad. De två subtraktionsuppgifterna som valdes ut och kontrasterades var:  $8 - 5 =$  samt  $5 - 8 =$ . Talen i subtraktionsuppgifterna befinner sig nära varandra på exempelvis en tallinje. Valet av de två subtraktionsuppgifterna gjordes för att försöka urskilja om informanterna undervisar olika arter av subtraktionsuppgifter med olika strategier. Anledningen att just subtraktionsuppgiften  $8 - 5 =$  valdes ut var att det är en subtraktionsuppgift som är vanligt förekommande för elever i grundskolans årskurser 1-3 samt att det är en subtraktionsuppgift som kan vara lämplig att beräkna utifrån en särskild strategi. Exempelvis är strategin *ta bort* mer lämplig om en subtraktionsuppgift är  $8 - 2 =$ . Med en sådan subtraktionsuppgift skulle möjligtvis aldrig aspekterna *jämföra* och *komplettera* ha synliggjorts under intervjuerna. Den andra subtraktionsuppgiften som valdes är ingen vanlig uppgift för elever i årskurserna 1-3, men uppgiften valdes ut av anledningen att lyssna in informanternas uppfattningar av fenomenet differens/skillnad i subtraktionsuppgifter som denna. Subtraktionsuppgifterna presenterades för informanterna under respektive intervju med en fråga som exempelvis: *På vilket sätt undervisar du om uppgifter som denna?* Jag ämnade lyssna in huruvida informanterna medvetet undervisar om strategier som kan generaliseras till subtraktionsuppgifter med negativa tal. Subtraktionsuppgiften

<sup>9</sup> *Fortsättningsvis kommer begreppet informant oftast att användas istället för lärare. Ibland har jag dock funnit det mer lämpligt att använda begreppet lärare. Vid citaten används kodningen Lärare I, Lärare II etcetera.*

skulle kunna ha synliggjort kvalitativt skilda uppfattningar av fenomenet differens/skillnad. Med tvåsiffriga tal i subtraktionsuppgifter skulle andra områden än differens/skillnad ha kunnat komma i fokus. Exempelvis skulle olika skriftliga räknemetoder, strategier för att växla eller positionssystemet ha kunnat komma i fokus. Den inledande frågan under intervjuerna var: *När och på vilket sätt introducerar du subtraktion?* Anledningen med den inledande frågan var att utifrån subtraktion komma in på fenomenet differens/skillnad.

## Uppläggning och genomförande

Innan intervjuerna utfördes prövades intervjufrågorna i en pilotstudie med två informanter. Båda dessa informanter har någon didaktisk utbildning i matematik. Båda informanterna har tidigare undervisat eller undervisar för tillfället (under perioden för min undersökning) elever i årskurserna 1-3. En av informanterna arbetade inte som lärare under min undersökningsperiod och kunde därför inte kommunicera med någon kollega om intervjuens innehåll. Den andra informanten i pilotstudien hade ingen kollega som intervjuades och kunde därför inte kommunicera intervjuens innehåll med någon kollega som på något vis kunde påverka något för en kommande intervju.

Starrin et al. (1996) skriver att frågeställningar i en kvalitativ intervju är mycket mer komplicerade än i en kvantitativ intervju. Frågorna måste vara öppna, men ändå ha en riktning (ibid.). Vidare skriver Starrin et al. (1996) att man bör skriva ett första utkast till en intervjuguide och pröva sin intervjuguide innan man genomför intervjuer för sin undersökning. ”De färdigheter, kunskaper och bedömningsförmågor som krävs för att göra en intervju av hög kvalitet kräver omfattande träning” (Kvale et al., 2014, s. 89-90). Detta är något jag tog hänsyn till och därför prövades innehållet i intervjuguiden innan intervjuer för min undersökning genomfördes. Intervjuguiden prövades för att se huruvida frågorna förstods, uppfattades och tolkades. En upptäckt som gjordes vid den första pilotintervjun var att uppfattningar av fenomenet differens/skillnad inte blev väl synliggjort och därför reviderades intervjuguiden. De två intervjuerna i pilotstudien ljudinspelades och avlyssnades under ett flertal tillfällen. Frågorna analyserades och ytterligare revideringar i intervjuguiden gjordes därefter. Även mitt förhållningssätt till respektive informant avlyssnades och analyserades.

En skriftlig förfrågan gjordes till berörda rektorer med information om anledningen till min undersökning, om den kategori informanter jag behövde för intervjuerna samt en förfrågan huruvida intervjuer kunde göras på informanternas arbetstid. Samtliga tillfrågade rektorer var positiva till att lärare kunde delta i intervjuer och att dessa intervjuer kunde ske under lärarnas arbetstid. Rektorerna mejlade mig kontaktuppgifter till lärare som stämde in på mitt planerade urval. Av de kontaktuppgifter som erhöles kontaktades samtliga lärare med en förfrågan om att delta i en intervju med ljudupptagning. Ett missivbrev bifogades i förfrågan. Missivbrevet innehöll relevant information för att lärarna skulle kunna ta ställning till huruvida de ville samtycka till att delta i en intervju eller inte. I missivbrevet framgick anledningen till varför intervjuer skulle genomföras. Där fanns också information om att ljudupptagning och eventuell filminspelning (om någon informant ämnade gestalta något under intervjun) skulle komma att ske. Lärarna gavs möjlighet att samtycka till intervju med ljud- och eventuell filminspelning eller att *inte* samtycka till en intervju med ljud- och filminspelning. Alternativet att delta i en intervju utan ljud- och filminspelning fanns inte med. För att jag skulle kunna urskilja informanternas uppfattningar av fenomenet differens/skillnad behövde intervjuerna vara dokumenterade med hjälp av ljudupptagning. Utan ljudupptagning som dokumentation hade det varit svårt att urskilja informanternas uppfattningar av fenomenet. Då hade jag varit hänvisad till att anteckna det som uttalades under intervjuerna och jag ansåg att den formen av dokumentation hade

stört mitt fokus att vara en aktiv lyssnare samt att det hade minimerat möjligheten att ställa relevanta följdfrågor. Lärarna gavs också möjlighet att samtycka till att intervjun kunde ligga till grund för min uppsats. Endast en av de tillfrågade lärarna svarade att han/hon inte samtyckte till att delta i en intervju med ljud- och filminspelning.

De lärare som samtyckte till intervjuer med ljudupptagning erhöll ytterligare frågor och information om detaljer för intervjutillfället. Den skriftliga förfrågan till rektorer om lärare att intervjuas finns med i uppsatsen som Bilaga 1, missivbrevet finns med som Bilaga 2 samt den ytterligare information till lärare som samtyckt till att delta i intervjuer finns med som Bilaga 3. Intervjuguiden finns med som Bilaga 4.

## **Ytterligare förberedelse**

Då några av de deltagande informanterna arbetade på samma skola bad jag dem, muntligen, att inte samtala med kollegor om intervjuens innehåll innan alla intervjuer hade genomförts med samtliga berörda. Anledningen till det var att jag ville höra varje enskild informants uppfattning av fenomenet differens/skillnad utan påverkan från en kollega som hade genomfört en intervju med mig. Efter att samtliga intervjuer hade genomförts uppmuntrade jag informanterna att samtala med kollegor. Huruvida varje deltagande informant rörde sitt deltagande i en intervju eller inte är förhållanden jag inte råder över. Min avsikt är och var att inte röja någons identitet i undersökningen och hänsyn togs till de etiska regler och principer som gäller vid forskning. Mer ingående beträffande vilka etiska regler och principer som gäller vid forskning lyfts fram under rubriken *Etiska aspekter*.

Som förberedelse läste jag en del litteratur om metoder för insamling av data. Då det genomfördes halvstrukturerade kvalitativa intervjuer för att urskilja informanternas olika uppfattningar av ett fenomen sändes inga frågor eller annat förberedelsemateriel ut till berörda informanter. Den information informanterna fick i förväg var genom det missivbrev som skickades ut där det framgick att intervjun skulle röra sig inom subtraktionsområdet. En av informanterna hade, på eget initiativ, förberett sig genom att ha antecknat en del om sin undervisning inom subtraktionsområdet. Samma informant hade lektionen innan intervjun en lektion om subtraktion som ett medvetet val.

## **Intervjuer**

Samtliga intervjuer skedde på respektive informants skola för att underlätta för informanterna. Intervjuerna skedde i rum där det garanterades ostördhet. Även en skylt med vädjan om ostördhet sattes upp på respektive dörr.

Varje intervju inleddes med att jag samtalande lite allmänt med informanterna för att försöka få till stånd en avslappnad stämning under respektive intervju. Därefter ställdes frågor angående informanternas utbildning i matematik, vilka årskurser de har undervisat i matematik samt antal år de har undervisat i matematik.

Under intervjuerna fanns tillgång till papper och pennor för att informanterna skulle ges möjlighet att gestalta något om de så önskade. För min egen del fanns anteckningsblock och penna med under intervjuerna om något specifikt skulle behöva antecknas. Ambitionen var att vara så närvarande som möjligt, vara en aktiv lyssnare och fokusera vad respektive informant uttryckte för att kunna ställa uppföljande frågor. På dessa grunder förde jag inte några anteckningar under respektive intervju. Min farhåga var att mitt fokus förflyttades från att vara en aktiv lyssnare till att föra anteckningar.

Den kvalitativa forskningsintervjun försöker förstå världen ur den intervjuades perspektiv och syftar inte till kvantifiering (Kvale et al., 2014). Den kvalitativa intervjun är fokuserad på ett bestämt tema

och riktar fokus mot ämnet genom öppna frågor (Starrin et al., 1996). Enligt Larsson (1986) är det centrala i kvalitativa metoder att man söker finna kategorier, beskrivningar eller modeller som bäst beskriver fenomenen i omvärlden medan andra metoder inriktar sig på i förhand givna kategorier och söker beskriva omvärlden genom mätning och testning. Starrin et al. (1996) lyfter fram att den kvalitativa intervjun bland annat ska identifiera eller upptäcka inte ännu kända egenskaper, företeelser eller innebörder. Den intervjuade kan under intervjun ändra sin beskrivning av en uppfattning om ämnet då den intervjuade kan upptäcka nya aspekter och se sammanhang som hon eller han inte varit medveten om tidigare. Intervjun kan därmed bidra till en läroprocess för både den som intervjuar och den intervjuade (Kvale et al., 2014; Starrin et al., 1996). Det här är något som blev tydligt under den större andelen av intervjuerna och informanterna uttryckte ibland detta, vilket kan läsas i följande citat:

Lärare I: Ja det var en jätteintressant fråga!

I (intervjuare): Ja hur vi lärare lyfter det.

Lärare VI: Ja, men det blev ju jätteintressant med intervjun!

I: Ja, visst är det. Jag lär mig jättemycket.

Lärare VI: Jag behöver ta ledigt resten av eftermiddagen för att fundera.

Båda uttalandena från informanterna skedde då respektive informant fick frågan angående hur elever vet åt vilket håll de ska förflytta sig på tallinjen då de använder tallinjen för att beräkna subtraktionsuppgifter.

Kvale et al. (2014) diskuterar epistemologiska frågor angående att intervjuar och huruvida en kvalitativ intervju är en metod eller ett hantverk. Som intervjuare följer du inte givna regler och manus då frågorna är av mer öppen art, vilket ställer krav på intervjuarens färdigheter och personliga omdöme (ibid.). I intervjuer utifrån en fenomenografisk ansats är det viktigt att få ett så rikhaltigt och uttömmande svar som möjligt. Detta innebär att olika följdfrågor som exempelvis: *Kan du utveckla det lite mer?* eller *Hur menar du då?* kan vara lämpliga. Denna teknik kallas *probing*. Även en *icke-verbal probing* kan vara lämplig och då kan intervjuaren exempelvis nicka eller humma för att informanten ska utveckla sitt svar (Dahlgren et al., 2015; Starrin et al., 1996). Intervjuaren växlar vanligen mellan att ställa frågor, lyssna och tolka det som informanten säger (Kvale et al., 2014). Innan intervjuerna funderade jag på hur jag skulle förhålla mig för att visa intresse, men inte lotsa informanternas svar. Kvale et al. (2014) lyfter även fram att det ställs krav på intervjuaren beträffande kunskaper i ämnet för att kunna ställa följdfrågor och följa upp de svar informanten ger. Att det krävs kunskaper inom det område de öppna frågorna och intervjun berör funderade jag en hel del kring. Utifrån att jag har handlett Learning Studies om subtraktion och negativa tal samt tagit del av relevant forskning hjälpte det mig att ställa uppföljande frågor.

## Materialbearbetning

Ljudupptagning av intervjuerna skedde såväl med programmet Audacity som med filmkamera. Ursprungligen fanns en filmkamera med vid intervjuerna om informanterna skulle vilja gestalta något. Filmkameran riktades nedåt i samtliga intervjuer och därmed dokumenterades ingen informant i bild. En upptäckt som gjordes under en av intervjuerna var att det är ytterligare en säkerhet att ha två källor för ljudupptagning. Programmet Audacity startades inte förrän efter några minuter under en intervju. Efter den händelsen beslutade jag att ha två ljudupptagningar utifrån en säkerhetsaspekt. Tyvärr fann jag under mitt arbete inte något lämpligt program för min dator för att transkribera intervjuerna. Det innebar att jag fick växla mellan ljudupptagning och Word. Det var ett onödigt och omständligt arbete. Att transkribera tar stor tid i anspråk och på grund av det rekommenderar jag andra att försöka finna ett program för transkribering för att underlätta den delen under ett forskningsarbete. Efter varje

intervju lyssnade jag på intervjuens innehåll med hörlurar vid ett flertal tillfällen innan transkriberingen påbörjades. Detta tillvägagångssätt hjälpte mig att inför kommande intervju kunna utveckla intervjuguiden. Stöd för detta tillvägagångssätt ges av Starrin et al. (1996) då de lyfter fram att det är ett oreflekterat och omedvetet sätt att se på analysfrågan då man genomför ett antal intervjuer och sedan när samtliga intervjuer är genomförda påbörjar analysarbetet.

Jag noterade att det var lättare att fokusera och höra vad informanterna beskrev under intervjuerna då jag använde hörlurar vid transkriberingarna. Enligt Norrby (2014) är en transkription en mer eller mindre fullständighet av intervjun och kan därför inte ersätta intervjun. Analysarbete sker, på dessa grunder, utifrån intervjun, ljudupptagningen samt transkriptionerna (ibid.). Redan under intervjun tyckte jag mig urskilja uppfattningar hos informanterna av fenomenet differens/skillnad. Dock försökte jag att fokusera och aktivt lyssna till hur respektive informant samtalade om sin undervisning inom subtraktionsområdet för att kunna ställa uppföljande frågor. En upptäckt som gjordes under intervjuprocessen var att intervjuerna tog längre och längre tid. Min reflektion kring detta var att jag förmodligen efter några intervjuer kunde ställa fler uppföljande frågor som kunde ge fler och mer uttömmande svar. Vid transkriptionen anpassades talspråket i huvudsak till ett konventionellt skriftspråk. Motiveringen till att anpassa talspråket till konventionellt skriftspråk var att det inte var det uttalade (talspråket) som fokuserades utan uppfattningar av fenomenet differens/skillnad. Transkriberingarna lästes ett flertal tillfällen och jag markerade med en överstrykningspenna det jag tolkade som informanternas uppfattningar av fenomenet differens/skillnad. De markeringar som gjordes koncentrerades genom att, det för undersökningen, väsentliga begrepp och innebörder fördes samman och skrevs in i en tabell för att försöka finna likheter och skillnader (Fejes et al., 2015). Vid analysarbetet försökte jag att bortse från mina egna uppfattningar genom att läsa transkriptionerna ett flertal tillfällen och därigenom bli väl förtrogen med informanternas beskrivningar. Då jag skapade kategorierna tog jag hänsyn till informanternas uttalanden och begrepp som de använde. *Vad* informanterna uttalade behövde jag tolka för att försöka klargöra vilka uppfattningar informanterna hade om fenomenet differens/skillnad. Kategorierna skapades även utifrån de skillnader av uppfattningar som urskiljdes under intervjuerna, då jag avlyssnade ljudupptagningarna, under transkriptionerna samt då jag läste transkriptionerna. Slutligen analyserade jag på egen hand utfallsrummet och ordnade de urskiljda kategorierna hierarkiskt. Jag återkom till de transkriberade texterna ett flertal tillfällen då jag beskrev de olika kategorierna och då uppsatsen färdigställdes. Under kategoriseringen blev det tydligt för mig att jag själv var i en lärandeprocess. Jag fick ta ställning till på vilket sätt de olika kategorierna skiljde i kvalitet. Detta medförde att jag behövde fundera på vilka olika strategier som kan tänkas vara generaliserbara och på vilket sätt i sådant fall. Därmed förändrades och utvecklades även mitt kunnande angående fenomenet differens/skillnad under forskningsprocessen. Enligt Kvale et al. (2014) är forskaren själv ofta i en lärandeprocess.

Utifrån vad informanterna beskrev om sin undervisning om fenomenet differens/skillnad urskiljdes tre kvalitativt skilda uppfattningar av fenomenet. De tre kvalitativt skilda uppfattningar av fenomenet differens/skillnad som urskiljdes och kategoriserades är:

Differens/skillnad *som* riktning från:

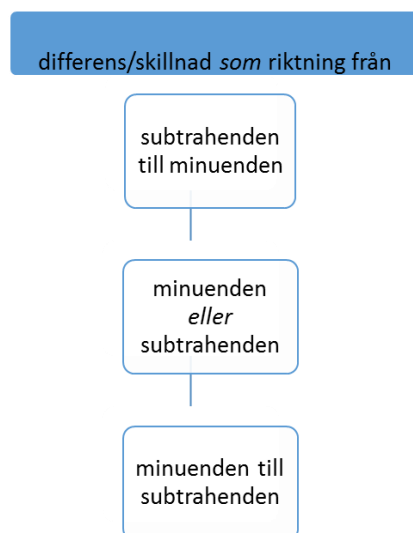
- subtrahenden till minuenden
- minuenden *eller* subtrahenden
- minuenden till subtrahenden

De tre kategorierna är hierarkiskt ordnade med den högsta kvalitativa nivån som den översta nivån under rubriken *differens/skillnad* i Figur 1. Hierarkin konstruerades utifrån de kritiska aspekter som

behöver urskiljas från en nivå till en annan. Ett hierarkiskt förhållande mellan kategorierna behöver inte innebära att de är ordnade efter den ordning man urskiljer och uppfattar innebörder för respektive kategori.

Motiveringen till den hierarkiska ordningen är:

- Då differens/skillnad uppfattas *som riktning från subtrahenden till minuenden* kan samtliga subtraktionsuppgifter beräknas, oavsett subtraktionsuppgiftens art. Dock är det en mindre lämplig strategi då tal i subtraktionsuppgifter befinner sig långt ifrån varandra, ur ordinalitetsperspektiv.
- Då differens/skillnad uppfattas *som riktning från minuenden eller subtrahenden* kan flera olika subtraktionsuppgifter beräknas. Dock behöver minuenden ha ett högre värde än subtrahenden för att en korrekt differens ska erhållas.
- Då differens/skillnad uppfattas *som riktning från minuenden till subtrahenden* begränsas de arter av subtraktionsuppgifter som kan beräknas. Subtraktionsuppgifter som exempelvis  $5 - (-8) =$  kan inte beräknas *som riktning från minuenden till subtrahenden*. För subtraktionsuppgifter som exempelvis  $81 - 79 =$  är det en omständlig strategi att utgå från minuenden.



**Figur 1. Hierarkisk ordning för kategorier av uppfattningar av fenomenet differens/skillnad.**

Här presenteras kategorierna med beskrivningar och citat som exemplifierar respektive kategori.

#### **Som riktning från subtrahenden till minuenden**

Fenomenet differens/skillnad uppfattas *som riktning från subtrahenden till minuenden*.

Subtraktionsuppgifter som  $8 - 5 =$  beräknas genom att elever ska utgå från subtrahenden och ta steg eller hopp på exempelvis tallinjen för att komma till minuenden. Subtraktionsuppgiften beräknas med strategin *komplettera* (räknesättet addition används) och är därmed en dynamisk operation. Riktningen



går mot positiva tal med högre värde<sup>10</sup> och differensen/skillnaden är 3 (+3) på grund av antal hopp eller steg på tallinjen samt riktningen.<sup>11</sup>

I: [...] Kan du säga ett exempel på en uppgift, för du säger att det här är en uppgift [ $8 - 5 =$ ] som är på gränsen att börja räkna nedåt [utgå från minuenden].

Lärare I: Nu har ju jag tvåor [årskursen] och då räknar vi till exempel då... vi... tjugoett minus nitton.

I: Mm.

Lärare I: Och då är det ju ingen bra strategi att räkna ner från tjugoett, tjugo, nitton... att räkna ner nitton utan att de ska se då... ja, som en tallinje att de ska se var tjugoett finns och var nitton finns och man kan räkna upp från nitton, tjugo, tjugoett, så.

I subtraktionsuppgifter som exempelvis  $21 - 19 =$  gav informanten uttryck för att uppfatta fenomenet differens/skillnad *som riktning från subtrahenden till minuenden*.<sup>12</sup>

Lärare V: [...] om talen ligger nära varandra så kan man bara räkna skillnad. Då kan man räkna hur många steg det är på talraden mellan dem.

I: Okej...

Lärare V: Eller om jag ska ta bort helt enkelt.

I: Mm.

Lärare V: Ää om jag har åtta godisar och äter upp fem.

I: Mm.

[...]

I: Just den här uppgiften [ $8 - 5 =$ ], vilken strategi skulle du lyfta fram till eleverna?

Lärare V: Ähm... då skulle jag nog säga ta bort för ähm... eller skillnad för den [ $8 - 5 =$ ] är på gränsen.

[...]

I: Nu visar du att ni börjar på fem.

Lärare V: Jaa...

I: Är det... vad är din tanke med att ni gör det?

Lärare V: Ähm... tanken är... jag vet faktiskt inte, men jag tror att jag tänker att det är svårare för dem att räkna bakifrån. För då... då kan de lika gärna ta bort.

I: Ja...

Lärare V: Tänker jag...

I: Mm.

Lärare V: Ähm... det tror jag kanske är mer naturligt att de räknar upp [...]

I: Mm.

Lärare V: Ää... [tystnad under tre sekunder] men, sedan ja... jo, men... jag tror det för det är enklare att räkna från det lägsta till det högsta... ähm... för att de ska förstå att det är skillnad. För när vi tar bort så hoppar vi ju åt andra hållet.

I: Mm.

Lärare V: Då hoppar vi ju fem steg bakåt. Ähm...

Informanten diskuterade fram och tillbaka, men tolkningen var att informanten slutligen gav uttryck för att uppfatta fenomenet differens/skillnad *som riktning från subtrahenden till minuenden* i subtraktionsuppgifter som  $8 - 5 =$ .

<sup>10</sup> Det är komplext att beskriva att röra sig i riktning mot tal med högre eller lägre värde då exempelvis -8 ur en aspekt kan ha ett högre värde än -5, men ur en annan aspekt ha ett lägre värde än -5. Detta lyfts fram av Altiparmak & Özdoan (2010), Ball (1993) och Kilhamn (2011).

<sup>11</sup> Det positiva tecknet skrivs vanligtvis inte ut för positiva tal.

<sup>12</sup> I Resultat skrivs att informanterna ger uttryck för att uppfatta eller uppfattar fenomenet på kvalitativt skilda sätt. Jag är medveten om att de uppfattningar som presenteras i undersökningens resultat kan ha ändrats. Precis som Kvale & Brinkmann (2014) och Starrin & Renck (1996) lyfter fram kan en intervju innebära en lärandeprocess för såväl en informant som för den som intervjuar.

### Som riktning från minuenden *eller* subtrahenden

Fenomenet differens/skillnad uppfattas som exempelvis ett avstånd, en mängd, en sträcka eller en bit från minuenden till subtrahenden *eller* från subtrahenden till minuenden. Det tas inte hänsyn till riktningens betydelse då subtraktionsuppgifter beräknas. Inte heller något värde för talen uttrycks. Subtraktionsuppgiften  $8 - 5 =$  beräknas utifrån aspekten *jämföra*. Operationen har ett statiskt förhållande då inget tas bort eller tillförs. Sträckans magnitud (storlek) och värde smälter samman. Subtraktionsuppgiften  $8 - 5 =$  beräknas genom att elever kan utgå från minuenden och ta steg eller hopp på exempelvis tallinjen för att komma till subtrahenden. Alternativt kan elever utgå från subtrahenden och ta steg eller hopp på exempelvis tallinjen för att komma till minuenden. I det första alternativet att beräkna subtraktionsuppgiften är riktningen mot negativa tal med lägre värde och differensen/skillnaden är 3 (+3) på grund av att elever hamnar på talet 5 (+5) på tallinjen genom att ta *tre steg* på tallinjen. I det andra alternativet att beräkna subtraktionsuppgiften genom att utgå från subtrahenden är riktningen mot positiva tal med högre värde och differensen/skillnaden är 3 (+3) på grund av att eleven hamnar på talet 8 (+8) på tallinjen genom att ta *tre steg* på tallinjen. Subtraktionsuppgifter som  $5 - 8 =$  skulle få ”lösningen” +3 då elever uppfattar differens/skillnad *som riktning från minuenden till subtrahenden eller som riktning från subtrahenden till minuenden* och om riktningen inte har betydelse. Fenomenet differens/skillnad uppfattas enligt kategorin *som riktning från minuenden till subtrahenden eller som riktning från subtrahenden till minuenden*.

Lärare VI: Vi har åtta. Vi ska räkna ut skillnaden mellan åtta och fem. Och skillnaden för här är två tal. Den är värd åtta och den är värd fem och vi har åtta här på talraden och vi har fem där på talraden. Värdet upp hit [pekar på talet fem] en, två, tre, fyra, fem. Ni ser det stämmer. Alla säger [informanten gör ett rollspel med tänkta elever som svarar]: ja det stämmer. Där har vi fem här har vi åtta. Det är värt åtta för det är ju åtta hopp upp till åtta. Ja det är det, kan vi konstatera.

I: Mm.

Lärare VI: Och vad är då skillnaden mellan åtta och fem? Om vi ser ur det här perspektivet?

I: Mm.

Lärare VI: Hit upp var det åtta steg. Vad är det då som är skillnaden? Jo det är den här biten som är skillnaden. Den här biten på talraden.<sup>13</sup> Mellan åtta och fem och mellan fem och åtta. [...]

Informanten beskrev att han/hon utgår från talet noll och går åtta steg till minuendens värde. Sedan har detsamma gjorts för subtrahenden. Informanten uttryckte att ett tals värde beror på antal hopp på exempelvis tallinjen. När differensen/skillnaden beskrevs lyftes inte värdet och riktningen fram, eftersom differensen/skillnaden beskrevs som ”den här biten”. Fenomenet differens/skillnad uppfattas därmed enligt kategorin *som riktning från minuenden till subtrahenden eller som riktning från subtrahenden till minuenden*.

---

<sup>13</sup> Informanten avsåg tallinjen med uttrycket talrad (min tolkning). På en talrad presenteras tal som diskreta tal, det vill säga, talen kommer som kompakta enheter. Talraden illustrerar endast ordinalitet och talen kommer i en bestämd ordning. Talraden är alltså inte kontinuerlig, det vill säga, det finns inget tal mellan exempelvis talen 4 och 5. Talraden visar därmed inte tals storhetsaspekt. På en tallinje finns det oändligt antal tal mellan exempelvis talen 4 och 5 (exempelvis talet 4,987). Tallinjen är därmed kontinuerlig. Tallinjen kan visa tal som en punkt och visar därmed ordinalitet. Tallinjen kan också visa tal som en sträcka och visar då kardinalitet. Tal på tallinjen kan också visas som en rörelse (Kilhamn, 2014).

### Som riktning från minuenden till subtrahenden

Fenomenet uppfattas som något som tas bort eller minskas. *Ta bort* är både en aspekt och en strategi. Subtraktionsuppgifter beräknas genom att elever ska utgå från minuenden och sedan *ta bort* eller *minska med* det subtrahenden anger. Subtraktionsuppgiften  $8 - 5 =$  eller subtraktionsuppgiften  $5 - 8 =$  beräknas med hjälp av strategin *ta bort*. Därmed är operationen dynamisk. Fenomenet differens/skillnad uppfattas enligt kategorin *som riktning från minuenden till subtrahenden*.

I: Jag tänker om du ska introducera en sådan här uppgift [ $8 - 5 =$ ] för första gången – vad tänker du att eleverna behöver kunna?

Lärare III: [Tystnad under fyra sekunder.] Alltså det för[sta], det första så när jag introducerar det här med, vilket var förra året då.<sup>14</sup> Då har vi konkret materiel.

I: Mm.

Lärare III: Ä... och vi har åtta stycken och så gör vi någonting med fem. Vi äter upp eller tar bort dem eller ger dem till en kamrat. Och hur många har du då kvar?

I: Mm.

Lärare III: Så skulle jag introducera det hela.

I: Mm.

Lärare III: Med... vilka konkreta materiel som helst. Det kan vara från klotsar till godis. Vad som helst, liksom.

Informanten beskrev att subtraktionsuppgiften  $8 - 5 =$  beräknas med hjälp av strategin *ta bort* och med konkret materiel. Fenomenet differens/skillnad uppfattas därmed enligt kategorin *som riktning från minuenden till subtrahenden*.

Lärare VII: En sak som nu har kommit upp som jag till och med frågade på Mattelyftet och som jag tycker är svårt att förklara ä... understreck minus öö öö sju är lika med tre. Och då försöker jag säga till barnen att det kan ju vara understreck, men man att man egentligen så kan man benämna det med x om man inte känner till det. [Minuenden i detta exempel.] Att vi vet inte vad x är värt och så ska vi ta bort ifrån någon mängd. Vi ska ta bort sju och så finns det kvar tre. Hur ska vi veta detta då? Och där... där kan ju jag se att man adderar sju och tre, men jag känner att så kan jag ju inte säga till eleverna i årskurs ett. Det ee de kommer ju inte att förstå det. Utan... på något sätt... så handlar det om att pröva sig fram då eller förstå att det måste vara mer än sju. Den där mängden är ju större än sju för vi ska ju plocka bort sju och så ändå få kvar tre. Så här kan man behöva testa med klotsar då. [...]

Informanten diskuterade subtraktionsuppgiften  $x - 7 = 3$ . Även om informanten själv skulle beräkna uppgiften som  $7 + 3 = 10$  uttryckte informanten att elever i grundskolans årskurs 1 inte skulle förstå strategin att beräkna subtraktionsuppgiften  $x - 7 = 3$  som  $7 + 3 = 10$ . På det sätt informanten samtalade om uppgiften uppfattas fenomenet differens/skillnad enligt kategorin *som riktning från minuenden till subtrahenden*.

Samtliga av de informanter som beskrev att de undervisar om negativa tal utgår från minuenden i subtraktionsuppgifter som  $5 - 8 =$ . Informanterna angav att anledningen att undervisa om negativa tal är att det ter sig naturligt då kallgrader diskuteras eller då elever skrivit  $5 - 8 =$ , men avsett  $8 - 5 =$ .

Lärare I: Mm då ää de tycker att det är jätteintressant för många refererar just till termometern ää att ää ja minusgrader. Det vet ju de flesta vad det är. Och att vi lyfter... vi kollar på tallinjen att det går ju faktiskt att räkna fem minus åtta. Och så kan vi ta fram en sådan där stor termometer som jag har någonstans liggandes. Alltså som man

<sup>14</sup> Hakparentesens innehåll [sta] är min tolkning.

drar ää den här termometern att vi drar den ner fem... minus  
[viskar en, två tre] åtta ja kolla, var hamnar vi då? [...]

Det informanten beskrev då subtraktionsuppgiften  $5 - 8 =$  ska beräknas med hjälp av en termometer är en rörelse (riktning) från minuenden till subtrahenden. På det sätt informanten samtalande om uppgiften uppfattas fenomenet differens/skillnad enligt kategorin *som riktning från minuenden till subtrahenden*.

Lärare II: Ää och sedan försöka få dem att förstå själva, men vi har ju en tallinje som går nedåt med negativa tal...

I: Mm.

Lärare II: [...] så då skulle jag visa på den.

I: Ja.

Lärare II: [...] fem och så kanske vi backar åtta steg...

I: Mm.

Lärare II: Då ser vi att vi kommer liksom nedåt. Kanske jag också skulle säga att du har fem och ska ge bort åtta.

I: Mm.

Lärare II: Då kommer ju liksom, det kommer ju inte att funka.

I: Mm.

Lärare II: Du vill liksom ha kvar att ge bort.

I: Mm.

Lärare II: Så då tror jag att jag mer så skulle ha [avslutar inte meningen]

I: Ja just det. Så du skulle både prata om att ge bort någonting och att visa på...

Lärare II: Ja, jag tror det.

I: ...tallinjen.

Lärare II: Att visa att du blir skyldig någonting.

Informanten diskuterade subtraktionsuppgiften  $5 - 8 =$  som steg på en tallinje samt som något som ska tas bort. Båda dessa uttalanden tolkades som en uppfattning av fenomenet differens/skillnad enligt kategorin *som riktning från minuenden till subtrahenden*.

## Tillförlitlighetsfrågor

Traditionella invändningar mot kvaliteter i intervjuforskning gäller bland annat huruvida intervjun kan ses som valid eller inte. Intervjun är beroende av subjektiva intryck och validering blir därmed en fråga om forskarens förmåga att kontinuerligt kontrollera, ifrågasätta samt teoretiskt tolka resultaten (Kvale et al., 2014). Många kvalitativa forskare har diskuterat huruvida begreppen validitet och reliabilitet är relevanta för kvalitativa undersökningar. Kvalitativa forskare menar att begreppen är mer lämpliga vid kvantitativ forskning och menar att innebörden behöver omdefinieras (Bryman, 2011). Trots dessa diskussioner angående validitet och reliabilitet gjorde jag valet att använda begreppen validitet och reliabilitet då jag diskuterade tillförlitlighetsfrågor. Jag funderade över vilken validitet min undersökning och därmed dess resultat kan sägas ha. Hur väl lyckades jag ställa frågor så att informanterna delgav mig deras uppfattningar av det fenomen jag valde att undersöka? Mättes det som avsågs att mäta? Hur tolkade informanterna de frågor som ställdes? Jag upplevde att jag urskiljde uppfattningar av fenomenet differens/skillnad och utifrån det kunde jag kategorisera dessa uppfattningar. Möjligen kunde de uppföljande frågorna utvecklas för att få syn på ytterligare fler uppfattningar av fenomenet eller för att få syn på fler alternativ hur informanterna kommunicerade om sin undervisning angående differens/skillnad. Jag var medveten om att jag eventuellt gjorde vissa för-givet-taganden då informanterna samtalande. Dessa för-givet-tagande togs eventuellt utifrån att undersökningsområdet är bekant för mig och att jag har "trott mig veta" vad som åsyftats. Möjligen ställdes inte alltid tillräckligt fördjupande och uppföljande frågor på dessa grunder. Trots detta vill jag ändå påstå att metoden med halvstrukturerade kvalitativa intervjuer gav en högre validitet och reliabilitet än om jag exempelvis hade valt enkäter för datainsamling. Som tidigare nämndes kunde jag

ha kompletterat de halvstrukturerade kvalitativa intervjuerna med exempelvis observationer av lektioner.

Intervjuer är det vanligaste sättet för datainsamling i fenomenografiska undersökningar. Man bör dock vara medveten om att intervjusituationer kan innehålla osäkra moment, som exempelvis på vilket sätt informanten getts möjlighet att tala om det fenomen som avses (Eriksson, 1999). En intervju med i förhand bestämda frågor utan uppföljning eller en enkät hade inte gett mig möjligheten att be informanterna att utveckla sina svar. Huruvida jag lyckades väl med att finna kvalitativa skilda uppfattningar av fenomenet differens/skillnad beror mer på min erfarenhet och kompetens att göra en sådan analys och tolkning än på val av metod.

Reliabiliteten i arbetet är inte den högsta då jag på egen hand, utan någon som helst triangulering, bearbetade, analyserade och tolkade materialet. Denna farhåga angående reliabiliteten lyfts även fram av Eriksson (1999). Även om två eller fler forskare skulle analysera datainsamlingen kvarstår att resultatet skulle kunna påverkas av respektive forskares erfarenheter (ibid.). Forskarens inverkan på resultatet av analysarbetet skulle möjligen kunna vara lättare att acceptera om resultatet sågs som en beskrivning av *möjliga* sätt att uppfatta ett fenomen (Eriksson, 1999). På grund av min undersöknings omfattning samt att jag ensam utförde analysarbetet presenteras min undersöknings resultat som *möjliga* uppfattningar av fenomenet differens/skillnad. Därmed gör jag inte på något sätt anspråk på att kategorierna av kvalitativa skilda uppfattningar av fenomenet differens/skillnad är generaliserbara. Ett alternativ för min undersökning kunde vara att jag hade valt att komplettera mina intervjuer med att observera lektioner då informanterna undervisade sina elever. Ytterligare ett alternativ kunde vara att fler forskare analyserade datainsamlingen. Med tanke på tidsplanen för min undersökning och examensarbete valdes observationer och att fler forskare som analyserade datainsamlingen medvetet bort. Att göra lektionsobservationer ser jag som ett möjligt utvecklingsområde för eventuell fortsatt forskning inom området.

## **Etiska aspekter**

Alla personuppgifter och arbetsmateriel behandlades konfidentiellt och i enlighet med Vetenskapsrådets grundläggande etiska principer för svensk forskning (Vetenskapsrådet, 2002). Då forskning bedrivs måste forskaren ta hänsyn till det grundläggande individskyddskravet. Kravet kan konkretiseras i fyra allmänna huvudkrav. Det första kravet är informationskravet och kan lämnas muntligt eller skriftligt (Vetenskapsrådet, 2002). Jag valde att ge skriftlig information via ett missivbrev. I missivbrevet framgick det att jag studerade på min fritid (därmed fanns det inte någon finansiär involverad i min undersökning). Det framgick vid vilket universitet jag studerade, anledningen till undersökningen, vilken metod som skulle användas för datainsamling och hur den insamlade datan skulle hanteras under och efter undersökningen. I missivbrevet framgick även att deltagande lärare skulle avidentifieras och att namnen skulle kodas som *Lärare I*, *Lärare II* etcetera, möjlighet att samtycka eller inte samtycka till att delta med data för undersökningen och på vilket sätt den insamlade datan skulle användas. Vidare gavs information i missivbrevet att jag hade tagit del av Ämnesrådets etiska regler och principer för forskning, min ambition att resultatet skulle kunna komma lärare till del samt att de lärare som valde att samtycka till att delta i intervjuer och därmed bidra med data skulle få ta del av resultatet.

Det andra kravet vid forskning är samtyckeskravet. I missivbrevet fanns en svarstalong för samtycke eller inte ett samtycke till att delta i en intervju med ljudupptagning och eventuell filminspelning. Svarstalongen kunde sändas till mig som en scannad svarstalong via mejl eller via postförsändelse. De lärare som svarade att de samtyckte till intervjuer med ljud- och filminspelning intervjuades.

Inget missivbrev med samtycke eller inte samtycke utsändes till föräldrar eller vårdnadshavare då inte någon data samlades in från elever. Jag deltog inte heller på några lektioner utan träffade endast enskilda lärare i avskilda samtalsrum. Det fanns inte någon nära relation mellan de deltagande lärarna och mig. Någon av lärarna var tveksam till filminspelning. Berörd lärare mejlade mig och berättade att han/hon inte ville delta i en filminspelning. Då jag förtydligade att det endast var händer som skulle komma att filmas om något eventuellt skulle gestaltas under intervjun samtyckte läraren till filminspelning. I direkt anslutning vid samtliga intervjuers avslut stämde jag av om respektive lärare samtyckte att jag kunde använda den insamlade datan. Som informant ska man ges möjligheten att avbryta sitt deltagande utan några som helst följder av det.

Det tredje kravet vid forskning är konfidentialitetskravet. De deltagande lärarna avidentifierades och kodades som tidigare beskrivits. Hänsyn togs också till att det inte ska kunna gå att härleda något i uppsatsen till någon lärare eller till någon skola. Möjligen kan de deltagande lärarna känna igen sina egna uttalanden i de citat som har lyfts fram. På vilket sätt de deltagande lärarna valde eller kommer att välja att kommunicera innehållet i intervjuerna eller innehållet i uppsatsen är faktorer jag inte råder över.

Det fjärde kravet vid forskning är nyttjandekravet. Den insamlade datan kommer inte att användas i något kommersiellt sammanhang. Ambitionen är att resultatet ska komma fler lärare till del och eventuellt ligga till grund för fortsatta diskussioner om undervisning beträffande subtraktion och fenomenet differens/skillnad. Resultatet kan också ligga till grund för fortsatt forskning, men konfidentiellt materiel kommer då inte att röjas. Efter avslutad studie förstördes insamlad data, vilket framgick i missivbrevet. Resultatet kommer inte på något negativt sätt användas av mig mot de informanter som deltog i undersökningen.

Ämnesrådet ger också rekommendationer som jag tog hänsyn till. De rekommendationer jag tog hänsyn till var huruvida informanterna skulle få ta del av innehåll som kan upplevas som känsligt. Jag fann dock inte någon anledning att låta någon av informanterna godkänna att jag tog med data som respektive informant bidrog med. Min motivering till det var att jag vägde vikten av att belysa uppfattningar av undersökt fenomen med huruvida deltagande informant kan röjas. Då informanternas personuppgifter inte kan härledas fann jag inte någon anledning att tillfråga någon informant om tillåtelse att delge data. En annan rekommendation är att deltagande informanter ges möjlighet att ta del av undersökningens resultat. Det framgick i mitt missivbrev att deltagande informanter kommer att få ta del av resultatet.

Intervjuer har inte alltid setts som en respekterad praktik, vilket följande citat från journalistikens tidigaste år visar. ”Intervjun är det värsta inslaget i den nya (journalistiken) – den är förnedrande för intervjuaren, motbjudande för intervjupersonen och tröttsam för läsarna” Le Figaro, 1886 (Kvale et al., 2014, s. 24). Även om detta citat uttalades för många år sedan och inom en annan genre är det en aspekt, som jag i rollen som intervjuare, tog med i mitt medvetande då min ambition var att respektive informant inte skulle känna sig exempelvis kränkt eller illa till mods. Likväl som att intervjuerna inleddes med att samtala lite allmänt innan ljudupptagning påbörjades avslutade jag också respektive intervju med att prata lite allmänt och utan ljudupptagning. Informanten informerades när ljudupptagningen påbörjades och när den avslutades.

Under en kvalitativ forskningsintervju råder en maktasymmetri då det inte är frågan om ett vardagligt samtal mellan jämbördiga parter. Det är en enkelriktad utfrågning och det kan finnas en dold agenda. Dessutom har forskaren vanligtvis monopol på tolkningen av intervjuens innehåll (Kvale et al., 2014; Starrin et al., 1996). Den intervjuade har dock makten att exempelvis vägra svara. Därmed kan man

uttrycka det som intervjuarens makt är av yttre slag medan den intervjuades makt är av inre slag (Marton et al., 2000). Att det råder maktasymmetri och att det under mina intervjuer rådde en enkelriktad utfrågning är aspekter jag behövde ta hänsyn till och vara medveten om under intervjuerna.

# Kapitel 4 Resultat

Resultatet har redovisats utifrån vad informanterna har beskrivit under intervjuerna om sin undervisning om fenomenet differens/skillnad.

## Hur beskriver lärarna sin undervisning om fenomenet differens/skillnad?

Av de informanter som har intervjuats har det framkommit att deras matematikundervisning i grundskolans årskurser 1-3 inleds med addition före subtraktion. Flera av informanterna har uttryckt att elever upplever subtraktion som svårare än addition. Några av informanterna har uttryckt varför elever kan uppleva subtraktion som svårare än addition.

Lärare IV: Eller ja alltså, ja addition kan jag tänka att de använder räkneramsan och räknar uppåt. Kanske... om det är lättare än att räkna bakåt... jag vet inte. Nä, jag har inte funderat så mycket över det.

Informanten har uttryckt att räkna räkneramsan ”uppåt” eller ”framåt” är lättare än att räkna räkneramsan ”nedåt” eller ”bakåt”. När elever räknar ramsan kan utgångspunkten (talet elever ska börja räkna från) vara vilket tal som helst, beroende på additions- eller subtraktionsuppgiften.

Lärare V: Plus är ju enklare för på något sätt så är det ju det man börjar med redan från förskola [och] förskoleklass. Så det brukar sitta där, men det är just när de ska omvandla det där till minus så då förstår de inte ens då vad subtrahera är.

Informanten har uttryckt en tanke om att elever har mött räknesättet addition redan som barn i förskolan och som elever i förskoleklass.

Lärare VIII: Det är väl ofta det självklara i läromedel. Först kommer addition och sedan kommer subtraktion. Som en slags följd på det. [...] Som en egen del där de [eleverna] antagligen inte alltid ser kopplingen.

Några av informanterna har beskrivit att de i sin undervisning påvisar sambandet mellan addition och subtraktion bland annat då de delar upp tal. Då informanterna delar upp tal i sin undervisning kommunicerar de det som *tafamiljer*, *talhus* eller *talkamrater* med elever. Att kunna dela upp tal och se hur de hänger ihop har nämnts av några informanter som en förkunskap för att kunna subtrahera.

En av informanterna har berättat att han/hon visar additionsuppgifter *över* tallinjen och subtraktionsuppgifter *under* tallinjen för elever eftersom den lärobok informanten har använder den metoden.

Lärare I: Över tallinjen hoppar vi addition. Förstår du hur jag menar då?

I: Jaha så du skiljer på ... är det en tanke du har?

Lärare I: Ja ä... alltså tallinjen när vi hoppar addition.

I: Mm.

Lärare I: Då hoppar vi ovanför tallinjen.

I: A...

Lärare I: Och när det är subtraktion då hoppar vi nedanför tallinjen.

I: Vad har du för tanke med det?

Lärare I: Jag tror att det är så i matteboken.

I: Ahaa.

Lärare I: Att det är ett tips att kunna se skillnad på addition och subtraktion i hoppen då.



Under intervjuerna har informanterna uttryckt subtraktion som *något som minskar, det blir färre, att man går nedåt, går åt andra hållet, åt negativa hållet* eller *man hoppar bakåt*.

När informanterna läser subtraktionsuppgiften  $8 - 5 =$  för sina elever läser informanterna uppgiften som: åtta minus fem eller åtta subtraherat med fem. Några av informanterna har beskrivit att de använder båda sätten att uttrycka uppgiften på. Ibland parallellt vid ett och samma tillfälle, ibland endast på det ena sättet.

Flera informanter har uttryckt att huruvida elever har läsriktningen klar för sig eller inte hänger samman med hur de klarar att beräkna subtraktionsuppgifter.<sup>15</sup> Några av dessa informanter har, i sammanhanget nämnt, att det ”första och största talet är det vi har” och att det är det talet som elever ska läsa först. Angående läsriktningen har informanter nämnt att i addition spelar läsriktningen ingen roll, men att det kan vara bra för elever att utgå från det största talet då de ska addera.

Begreppen *minuend*, *subtrahend* eller *termer* används inte av någon av informanterna i kommunikationen med elever enligt vad informanterna har beskrivit. Begreppen har inte heller använts under intervjun av informanterna. Endast en informant har beskrivit att han/hon försöker föra in begreppet *differens* för ”lösningen” i subtraktion, eftersom han/hon i addition har använt begreppet *summa* för ”lösningen”. Två av informanterna har lyft fram att de *inte* använder begreppet *differens* med elever. De informanter som inte använder begreppet *differens* har uttryckt ”lösningen” i subtraktion som: i) *det som blir*, ii) *vad man har kvar*, iii) *vad det är*, iv) *svaret*, v) *lika mycket som*, vi) *det som ska vara på den här sidan* eller vii) *det som ska stå här*.

Majoriteten av informanterna har uttryckt att de introducerar subtraktion som *ta bort* oavsett hur subtraktionsuppgiften ser ut. Det innebär att om subtraktionsuppgiften är  $8 - 2 =$  eller  $8 - 5 =$  undervisas endast om strategin *ta bort*. En av informanterna har uttryckt att det kan förvirra för elever om flera strategier visas parallellt i den inledande undervisningen.

Lärare VIII: [...] Nej i och för sig. Det finns ju det motsatta att hoppa från fem till åtta. Hur många steg är det från fem till åtta?

I: Mm. Hur lyfter du det här?

Lärare VIII: Ja, jag tror kanske inte att jag har gjort det i första skedet.

Om jag kan komma ihåg rätt så är det nog så att blir det lite förvirrat. Så om jag kan komma ihåg rätt så brukar jag först presentera det ena sättet och sedan det andra och sedan försöka få dem att förstå att det hänger ihop. Att det egentligen är samma sak fast ää det är det ju inte men, [skrattar] att det har att göra med varandra ändå.

Aspekten och strategin *ta bort* kommuniceras på olika sätt med en och samma elevgrupp. Kontexten som informanterna har beskrivit är oftast att något *äts upp*, *ges bort*, *springer iväg* eller *köps*. Samtliga informanter använder laborativt materiel, eller som informanterna själva har uttryckt: konkret materiel.<sup>16</sup> Det konkreta materieleet är oftast så kallade plockisar. Det kan exempelvis vara klotsar eller stenar och som kan räknas en till en. Det konkreta materieleet används också för att *ta bort* en till en. Vid en subtraktionsuppgift som exempelvis  $8 - 5 =$  räknas åtta stenar från och med en sten till och med åtta stenar. Därefter tas fem stenar bort och då räknas återigen från och med en sten till och med fem stenar. Huruvida elever *ser* ”lösningen” direkt, så kallad, subitizing eller huruvida de återigen räknar från och med en sten till och med tre stenar har inte framkommit under intervjuerna. Det har inte heller varit av vikt för undersökningen och därför har inga uppföljande frågor ställts angående subitizing. Några av informanterna har nämnt att elever på eget initiativ tar hjälp av sina fingrar för att

<sup>15</sup> Läsriktningen i exempelvis Sverige då läsriktningen inte är densamma i hela världen.

<sup>16</sup> Fortsättningsvis används begreppet konkret materiel.

beräkna subtraktionsuppgifter utifrån aspekten och strategin *ta bort*. Även pengar används som konkret materiel vid aspekten och strategin *ta bort* då kontexten ibland kan vara att något ska köpas.

I: [...] Du sa att du tycker att pengar är bra. Använder du pengarna på något annat sätt än stenarna exempelvis? [...]

I: [...] Då tänker jag – pengar – det kan ju också vara en till en, men det skulle också kunna vara värden. Så det var lite det jag undrar om... om du använder pengars värde eller om du har åtta enkronor om du har en sådan uppgift [ $8 - 5 =$ ] som här?

Lärare III: Neej, det har jag inte gjort. Inte vad jag kan påminna mig.

Pengar används, enligt informanten, på samma sätt som exempelvis klotsar för att beräkna subtraktionsuppgifter för att finna differensen/skillnaden.

Några av informanterna har nämnt att elever ibland får *rita* sina beräkningar som ett alternativ till plockisar. Då eleverna ritar görs det exempelvis med hjälp genom att rita streck. När eleverna använder denna metod ritar de åtta streck (för subtraktionsuppgiften  $8 - 5 =$ ) och därefter kryssar de över alternativt suddar ut fem streck. Beräkningen för att finna differensen/skillnaden utförs genom att elever räknar en till en.

Endast en av informanterna har uttryckt att han/hon använder konkret materiel som exempelvis plockisar *och* tallinjen för att introducera och för att gestalta subtraktion och differens/skillnad.

I: Om du ska introducera subtraktion – vad har du för typ av exempel?

Lärare VIII: Det finns en massa begrepp, ta bort [och] minska. Rent praktiskt är det väl plockisar till exempel [...], men också tallinjen tycker jag är bra. Jag tycker att en del elever blir väldigt behjälpta av den. Se tallinjen, hopp på den. Så jag försöker väl presentera det på olika sätt.

I: Så det gör du samtidigt?

Lärare VIII: Inte samtidigt under samma lektion, men relativt parallellt.

I: Kan du beskriva på vilket sätt du använder tallinjen?

Lärare VIII: Det kan väl vara så att först så att man hoppar och vad man utgår ifrån och så. Och sedan så om det är åtta [och] ta bort fem så visar vi var vi är. Att vi är på åtta och tar bort fem. Då hoppar vi fem bakåt. Så har det kunnat se ut till exempel.

I: Skulle du kunna visa den uppgiften på annat sätt på tallinjen eller är det du beskriver nu som du brukar visa?

Lärare VIII: Å jag måste tänka efter. Det är nog så. Det är nog så jag har visat. Ja, jag tror faktiskt det.

Även om informanten har beskrivit att konkret materiel som exempelvis plockisar *och* tallinjen används för att introducera subtraktion och differens/skillnad används inte materielelet under samma lektion. Då tallinjen används ska eleverna utgå från minuenden för att sedan gå det antal steg bakåt som subtrahenden anger för att *ta bort* steg från minuendens värde.

Flera av informanterna har uttryckt att subtraktionsuppgifter som  $8 - 5 =$  bör automatiseras och att eleverna bör kunna ”se” eller veta ”lösningen”. En av informanterna har uttryckt att han/hon vill att eleverna ska kunna lämna det konkreta materielelet och räkna subtraktionsuppgifter som  $8 - 5 =$  i huvudet.

I: Om de inte ska använda materiel – hur tänker du att de ska lösa den [ $8 - 5 =$ ] utan materiel?

Lärare III: [Tystnad under fyra sekunder.] Ja, jag vill att de ska räkna ut det i huvudet. Jaa. [...] Jag antar att en del har bilder i huvudet. Att de ser hur det skulle se ut. Åtta klotsar och ta bort de här [5].

Informanten har beskrivit en beräkning som görs utan materiel, men på samma sätt som elever gör med det konkreta materiele, det vill säga genom att *ta bort* fem.

Aspekten *jämföra* introduceras senare i undervisningen än aspekten *ta bort*. När informanterna introducerar aspekten *jämföra* i sin undervisning har informanterna beskrivit att de, tillsammans med elever, tittar på skillnaden mellan antal i två olika högar. Exempelvis ligger åtta plockisar i en hög och fem plockisar i en annan hög. Sedan jämförs antal plockisar i de två högarna genom att antalen räknas en till en samtidigt i de båda högarna. När man kommer till antalet fem (i subtraktionsuppgiften  $8 - 5 =$ ) i de båda högarna kommuniceras med elever att antalet är *lika* i högarna och att det är tre plockisar *över* i högen med åtta plockisar. En del av informanterna har uttryckt att de kommunicerar det med elever som att det är tre *kvar* eller tre *fler*. Då informanterna har kommunicerat relationen mellan antal har endast begreppet *fler* lyfts fram. Att kontrastera begreppet *fler* med begreppet *färre* är det ingen av informanterna som har beskrivit att de gör vid jämförelsesituationer. Ett annat exempel på aspekten *jämföra* har en av informanterna beskrivit som att jämföra två pennors längd.

Lärare II: Då skulle jag rita två pennor.

I: Jaa.

Lärare II: Och så kanske... den här är åtta och den här är fem. Hur mycket längre är den här pennan?

I: Jaa, ok så då pratar du om längden?

Att jämföra tals relationer lyfts fram senare i undervisningen om differens/skillnad än att jämföra antal. När informanterna har samtalat om aspekten *jämföra* under intervjuerna har de använt begreppet *skillnad*. Då informanterna introducerar *skillnad* för elever använder många av informanterna tallinjen för att påvisa skillnaden som *bit*, *hopp* eller *steg* mellan två tal.

Lärare IV: Så skulle jag rita in var vi har åttan och var vi har femman.

I: Jaa.

Lärare IV: Så... så skulle vi... prata om det... hur mycket... ja, hur gör jag? Det kan jag inte så där... ähm [Tystnad under fyra sekunder.] där pratar vi nog om steg mellan.

I: Mm.

Lärare IV: Så hur... stor... är skillnaden? Hur många steg är det mellan talen?

Är det?

De flesta av informanterna har beskrivit att det finns tallinjer uppsatta på väggen i deras klassrum. Några av informanterna har beskrivit att de uppsatta tallinjerna har både positiva och negativa tal, men de flesta av informanterna har beskrivit att de uppsatta tallinjerna endast har positiva tal inom talområdet 0-20 eller 0-100. Ett fåtal av informanterna har beskrivit att de använder sig av en tom tallinje för att gestalta skillnader mellan tal. Ytterligare några få av informanterna har beskrivit att de även har en tallinje som placeras på golvet i klassrummet för att elever ska kunna gå på tallinjen. Dessa tallinjer har endast positiva tal, enligt informanterna.

Då informanterna har beskrivit på vilket sätt de använder tallinjen i sin undervisning för att visa på *skillnad* utgår majoriteten av informanterna från subtrahenden då subtraktionsuppgiften exempelvis är  $8 - 5 =$  och elever går eller hoppar sedan det antal steg som krävs för att komma till minuenden. Informanterna har uttryckt strategin att gå från subtrahenden till minuenden som exempelvis *göra om till addition, lägga till, titta uppåt, räkna uppåt, gå åt vänster, hur många steg högre* samt *ta det lägsta och räkna upp till det största*.

En av informanterna har uttryckt att han/hon inte visar på någon speciell riktning för att visa på skillnad mellan två tal.

Lärare VII: [...] Men jag skulle ju kunna jämföra också.

I: Mm.

Lärare VII: Tjugofem minus tjugotre.<sup>17</sup> Titta på tallinjen var tjugotre finns och var tjugofem finns. Hur långt är avståndet där mellan?

I: Om du skulle visa en elev hur man kan tänka där – om eleven inte vet hur den ska göra? Hur skulle du visa? Var skulle du ha som utgångspunkt? Vilket tal skulle du utgå ifrån?

Lärare VII: Jag skulle nog börja med tjugofem, tror jag. Här har vi tjugofem och så skulle jag peka på det och så här ligger tjugotre. Här finns tjugotre. Sedan tror jag att jag skulle vifta med pennan. Det är ju liksom inte säkert att det bara var åt ena hållet utan det kunde nog gå lite fram och tillbaka så där. Här mellan tjugotre och tjugofem eller mellan tjugofem och tjugotre. Hur långt är det avståndet? Så jag...[informanten avslutar inte meningen].

I: Har du någon tanke med det?

Lärare VII: Jag kan inte hundra svära på att jag skulle börja på tjugofem.

Majoriteten av informanterna har uttryckt att de tycker att strategin att utgå från subtrahenden är mest lämplig vid subtraktionsuppgifter som exempelvis  $8 - 5 =$ , men att de i den inledande undervisningen om differens/skillnad undervisar utifrån strategin *ta bort*. Informanterna har inte kunnat delge hur de motiverar att de anser att det mest lämpliga är att utgå från subtrahenden i nämnd subtraktionsuppgift. På vilket sätt informanterna kommunicerar denna strategi med elever har informanterna inte kunnat beskriva. Flera av informanterna har uttryckt att de inte har funderat på vilket sätt de lyfter fram i sin undervisning att det kan vara lämpligare att utgå från subtrahenden då en viss typ av subtraktionsuppgifter ska beräknas. En av informanterna kommunicerar med eleverna att de *ska* utgå från subtrahenden, men har inte kunnat motivera anledningen till det. Anledningen att utgå från subtrahenden har några av informanterna uttryckt som att det är ”mer naturligt”.

Lärare VI: [...] Men... jag tror inte att jag så ofta pratar neråt för jag vill att de ska räkna uppåt för jag det är ju närm[are], går fortare. Fem, sex, sju, åtta. Det är naturligare att räkna åt det hållet.

Lärare VI: Så det är något jag har fått för mig.

I: Ja...

Lärare VI: Jag ska absolut åt det hållet. [...]

I: Hur skulle du uttrycka det till eleven? Eleven kanske säger: jag kan ju gå från åtta till fem – varför måste jag gå från fem till åtta?

Lärare VI: [Skrattar] Ja då hade jag nog sagt att det är mer naturligt för mig. [Skrattar].

Ingen av informanterna har beskrivit att de undervisar om att den associativa och kommutativa lagen gäller för addition. Inte heller har informanterna beskrivet att de undervisar om att de båda lagarna *inte* gäller för subtraktion och därmed inte när innebörder av fenomenet differens/skillnad ska urskiljas.

Utifrån vad informanterna har beskrivit är det endast några få av dem som undervisar elever i grundskolans årskurser 1-3 om negativa tal.

## Hur uppfattar lärarna fenomenet differens/skillnad?

Resultatet har presenterats utifrån gruppnivå, men även utifrån individnivå. I Tabell 3 har respektive informants uppfattning/uppfattningar för respektive kategori redovisats samt antal uppfattning/uppfattningar per kategori utifrån subtraktionsuppgiften  $8 - 5 =$ . I Tabell 4 har respektive informants uppfattning/uppfattningar för respektive kategori redovisats samt antal uppfattning/uppfattningar per kategori utifrån subtraktionsuppgiften  $5 - 8 =$ . I Tabell 3 och Tabell 4

---

<sup>17</sup> Subtraktionsuppgiften  $25 - 23 =$  är informantens eget exempel.

har kategorierna presenterats utifrån den hierarkiska ordningen med den kvalitativt högsta nivån som den översta nivån utifrån Figur 1. En och samma informant kan ha gett uttryck för flera kvalitativt skilda uppfattningar av fenomenet differens/skillnad.

**Tabell 3. Uppfattningar av differens/skillnad utifrån subtraktionsuppgiften  $8 - 5 =$ .**

<i>Utifrån subtraktionsuppgiften <math>8 - 5 =</math></i>									
<i>Informant</i>	<i>Lär I</i>	<i>Lär II</i>	<i>Lär III</i>	<i>Lär IV</i>	<i>Lär V</i>	<i>Lär VI</i>	<i>Lär VII</i>	<i>Lär VIII</i>	<i>Antal informanter/kategori</i>
<b>Kategori</b>									
<b>1 Från subtrahend</b>	x	x	x	x	x	x	x	x	8
<b>2 Från minuend eller subtrahend</b>		x				x	x		3
<b>3 Från minuend</b>		x	x	x		x	x	x	6
<b>Antal kategorier/informant</b>	1	3	2	2	1	3	3	2	

**Tabell 4. Uppfattningar av differens/skillnad utifrån subtraktionsuppgiften  $5 - 8 =$ .**

<i>Utifrån subtraktionsuppgiften <math>5 - 8 =</math></i>									
<i>Informant</i>	<i>Lär I</i>	<i>Lär II</i>	<i>Lär III</i>	<i>Lär IV</i>	<i>Lär V</i>	<i>Lär VI</i>	<i>Lär VII</i>	<i>Lär VIII</i>	<i>Antal informanter/kategori</i>
<b>Kategori</b>									
<b>1 Från subtrahend</b>									0
<b>2 Från minuend eller subtrahend</b>									0
<b>3 Från minuend</b>	x	x	x	x	x	x	x	x	8
<b>Antal kategorier/informant</b>	1	1	1	1	1	1	1	1	

Utifrån vad informanterna *Lär I* och *Lär V* har beskrivit undervisar de om strategin *ta bort* vid subtraktionsuppgifter som  $8 - 3$  och har därmed gett uttryck för att uppfatta fenomenet differens/skillnad *som riktning från minuenden till subtrahenden* vid den typen av subtraktionsuppgifter samt vid subtraktionsuppgifter som  $5 - 8 =$ . Informanten *Lär VI* har gett uttryck att uppfatta fenomenet differens/skillnad enligt samtliga tre kategorier, men undervisar inte vanligtvis utifrån kategori 2, enligt hur informanten under intervjun har beskrivit sin undervisning. Utifrån vad informanterna *Lär II*, *Lär III*, *Lär IV*, *Lär VII* samt *Lär VIII* har beskrivit undervisar de utifrån samtliga kategorier som stämmer överens med respektive informants uppfattningar av fenomenet differens/skillnad. Samtliga strategier som kan sammankopplas med de olika kategorierna undervisas det om för alla subtraktionsuppgifter oavsett subtraktionsuppgiftens art.

## Sammanfattning

Informanterna har beskrivit att de inledningsvis undervisar om fenomenet differens/skillnad som *ta bort* oavsett subtraktionsuppgiftens art. En av informanterna har uttryckt att det kan vara förvirrande för elever om fler strategier visas samtidigt i den inledande undervisningen. Konkret materiel som exempelvis plockisar eller pengar används i undervisningen då elever ska *ta bort*, enligt informanterna. En del elever ritar streck för att beräkna subtraktionsuppgifter som *ta bort*. Exempelvis för subtraktionsuppgiften  $8 - 5 =$  ritas åtta streck och sedan kryssas fem streck över eller suddas ut. Några elever använder även fingrar för att beräkna subtraktionsuppgifter utifrån strategin *ta bort*, enligt vad informanterna har beskrivit. En av informanterna har beskrivit att han/hon även använder tallinjen i undervisningen för att visa subtraktionsuppgifter som *ta bort*. Elever ska då utgå från minuenden, enligt vad informanten har beskrivit och backa de antal steg som subtrahenden anger.

Senare i undervisningen lyfts fenomenet differens/skillnad fram genom att *jämföra antal*. Då fenomenet differens/skillnad lyfts fram i undervisningen genom att *jämföra antal* används plockisar och två högar jämförs. Informanterna har beskrivit att de kommunicerar jämförelsen av antal som något som blir *kvar* eller är *fler*. En av informanterna lyfter även fram *jämförelse av längd*. Informanten har exemplifierat det med att rita två pennor med olika längd och kommunicerat det som att den ena pennen är *längre*.

Därefter lyfts fenomenet differens/skillnad fram i undervisningen för att *jämföra tals förhållanden*, enligt vad informanterna har beskrivit. Då informanterna har beskrivit hur de undervisar om att *jämföra tals förhållanden* används ofta tallinje. Tallinjen används för att kommunicera differens/skillnad mellan två tal som *biten* mellan de två talen eller som *skillnad* mellan två tal och då ska eleverna utgå från subtrahenden och röra sig i en riktning mot minuenden, enligt majoriteten av informanterna. Denna strategi har exemplifierats av informanterna med subtraktionsuppgifter där minuenden har ett högre värde än subtrahenden. En av informanterna har beskrivit att han/hon inte visar på någon särskild riktning då subtraktionsuppgifter ska beräknas med hjälp av tallinje. Informanten har uttryckt att han/hon kan visa differens/skillnad mellan två tal utifrån minuenden till subtrahenden *och* från subtrahenden till minuenden.

Informanterna har gett uttryck för att uppfatta fenomenet differens/skillnad på olika sätt och en och samma informant kan ha gett uttryck för flera olika uppfattningar för en och samma subtraktionsuppgift. De flesta av informanterna har gett uttryck för uppfattningen av fenomenet differens/skillnad *som riktning från subtrahenden till minuenden* vid subtraktionsuppgifter som  $8 - 5 =$ . Samtliga informanter har gett uttryck för att uppfatta fenomenet differens/skillnad *som riktning från minuenden till subtrahenden* vid subtraktionsuppgifter som  $5 - 8 =$ .

## Analys av data/empiri

Utifrån vad informanterna har beskrivit om sin undervisning beträffande subtraktion och fenomenet differens/skillnad har en kvalitativ analys genomförts.

### Hur beskriver lärarna sin undervisning om fenomenet differens/skillnad?

Då informanterna har beskrivit på vilket sätt de undervisar om strategin *ta bort* används konkret materiel som exempelvis plockisar. Vid en subtraktionsuppgift som  $8 - 5 =$  räknar elever från och med en till och med åtta för att lägga fram åtta plockisar. Sedan ska fem plockisar tas bort, vilket innebär att elever räknar från och med en till och med fem. Då elever inte ser differensen/skillnaden tre direkt

(utan att räkna), så kallad, subitizing behöver de återigen räkna plockisarna från och med en till och med tre. Även en subtraktionsuppgift som  $8 - 3 =$  beräknas på samma sätt med konkret materiel. Detta innebär att elever inte räknar räkneramsan bakåt, utan endast framåt, då de använder konkret materiel för att beräkna subtraktionsuppgifter. Informanterna har beskrivit att elever även använder papper och penna för att beräkna subtraktionsuppgifter genom att rita streck som sedan kryssas över eller suddas ut. Då elever använder papper och penna för att beräkna nämnda subtraktionsuppgifter och suddar ut streck som de har ritat finns en risk att få felaktiga differenser/skillnader. Med tillvägagångssättet att sudda ut streck kan det vara svårt att kontrollera (exempelvis genom att addera differensen med det som suddats ut) sin differens/skillnad, huruvida den är korrekt eller inte. Används nämnda metoder då det kan vara lämpligare att beräkna differens/skillnad med strategin *komplettera* kan nämnda metoder ses som omständliga och olämpliga. Då informanterna har beskrivit sin undervisning har det synliggjorts att då modellen tallinje används i undervisningen för differens/skillnad har strategin *komplettera* oftast förekommit. Det innebär att elever ska utgå från subtrahenden till minuenden för att finna differensen/skillnaden. Riktningens betydelse lyfts inte fram i undervisningen och kommuniceras inte med elever. En av informanterna använder tallinjen för att elever ska utgå från minuenden och backa de antal steg som subtrahenden anger. Det innebär att det handlar om strategin *ta bort*. De antal steg som *backas* är det som tas bort. I de fall en termometer används i undervisningen, utifrån vad informanterna har beskrivit, används oftast strategin *ta bort*.

Elever i grundskolans årskurser 1-3 kan få korrekt differens/skillnad då de beräknar subtraktionsuppgifter där  $a > b$ , men kan inte senare under sin skoltid generalisera strategier då de inte getts möjlighet att veta *varför* de får de differenser/skillnader som de får i subtraktionsuppgifter som  $8 - 5 =$ . Kontrasteras subtraktionsuppgiften  $8 - 5 =$  med subtraktionsuppgiften  $5 - 8 =$  och strategin *komplettera* genom att utgå från *subtrahenden till minuenden* utan att kommunicera riktningens betydelse kan differensen uppfattas som  $3 (+3)$ . Om en tallinje används som modell är det tre steg som har förflyttats. Differensen/skillnaden  $3 (+3)$  erhålls även i kategorin *som riktning från minuenden till subtrahenden eller från subtrahenden till minuenden* där uppfattningen är att riktningen inte är av betydelse. I nämnd kategorin erhålls differensen/skillnad  $3 (+3)$  i båda nämnda subtraktionsuppgifter då differens/skillnad uppfattas som ”biten mellan” (magnitud) två tal. ”Biten mellan” har ingen riktning. För att elever ska kunna förstå negativa tal och senare under sin skolgång kunna utföra matematiska operationer med negativa tal måste de ha getts möjlighet att urskilja att tal har *både* magnitud och värde.

Utifrån vad informanterna har beskrivit om sin undervisning lyfts inte subtraktionsuppgifter som  $x = a - b$  fram i undervisningen. De subtraktionsuppgifter som har exemplifierats har i de flesta fall varit uppgifter som  $a - b = x$ . Det behöver inte innebära att inte andra sätt att exemplifiera differens/skillnad förekommer i informanternas undervisning.

De flesta av informanterna har beskrivit att de undervisar om aspekten *jämföra* genom att jämföra antal, längd eller tals förhållanden. Då aspekten *jämföra* tas upp i undervisningen om differens/skillnad är det i ett senare skede än då aspekten och strategin *ta bort* behandlas. Det innebär att elever får kortare tid i undervisningen om differens/skillnad för att urskilja och kunna aspekten *jämföra* och strategin *komplettera*. Den subtraktionsuppgift som medvetet valts i undersökningen kan ses som mer lämplig för strategin *komplettera*.

Samtliga informanter i undersökningen har lyft fram att de senare i undervisningen lyfter fram strategin *komplettera* genom att utgå från subtrahenden till minuenden vid subtraktionsuppgifter som  $8 - 5 =$ . Informanterna har beskrivit att då de undervisar om differens/skillnad i subtraktionsuppgifter som  $8 - 5 =$  och utgår från *subtrahenden till minuenden* kommunicerar de inte med elever varför

denna strategi är lämplig. Informanterna har under intervjuerna gett uttryck för att de inte kan motivera varför strategin kan anses som mest lämplig. En farhåga som informanterna har lyft fram är att elever använder strategin *ta bort* om de utgår från minuenden i subtraktionsuppgifter som nämnd uppgift. Det är samma informant som har undervisat om strategin att *ta bort* inledningsvis i undervisningen för nämnd subtraktionsuppgift som uttalar farhågan. Några informanter har uttryckt det som att *det känns mer naturligt att gå från subtrahenden*. Tolkningen är att det är just nämnd farhåga som ligger till grund för anledningen att informanterna vill att elever ska utgå från subtrahenden, men att informanterna inte själva är medvetna om anledningen. Det kan också finnas andra anledningar, vilket inte har framkommit under intervjuerna. Jag har avstått från att redovisa andra eventuella anledningar till varför majoriteten av informanterna anser att elever ska utgå från subtrahenden till minuenden då det endast skulle utgå från spekulationer.

En informant har beskrivit att han/hon försöker föra in begreppet *differens* för ”lösningen” i subtraktion, eftersom han/hon i addition har använt begreppet *summa* för ”lösningen”. Några av informanterna har lyft fram att de *inte* använder begreppet *differens* med elever. De informanter som inte använder begreppet *differens* har uttryckt ”lösningen” i subtraktion som: i) *det som blir*, ii) *vad man har kvar*, iii) *vad det är*, iv) *svaret*, v) *lika mycket som*, vi) *det som ska vara på den här sidan* eller vii) *det som ska stå här*.

- i) *Det som blir* indikerar på att det är ett dynamiskt förhållande och att något exempelvis ska minskas eller tas bort. Det indikerar inte på en jämförelse mellan två tal. Då *differens* uttryckas som *det som blir* menas sällan subtraktionsuppgiften ser ut som  $8 - x = 3$  eller  $x - 5 = 3$ .<sup>18</sup>
- ii) *Vad man har kvar* indikerar på att strategin *ta bort* ska användas. Se även subtraktionsuppgifterna under punkt i).
- iii) *Vad det är* indikerar på ett statiskt förhållande och det indikerar på att en jämförelse mellan två tal kan göras.
- iv) *Svaret* indikerar på ett dynamiskt eller statiskt förhållande. Se även punkt i) och punkt iii).
- v) *Lika mycket som* fokuserar likhetstecknets användning och innebörd och inte specifikt aspekterna *ta bort* eller *jämföra*. Aspekten och strategin *komplettera* skulle kunna avses utifrån *lika mycket som*.
- vi) *Det som ska vara på den här sidan* se punkt i), punkt ii), punkt iii) samt punkt iv).
- vii) *Det som ska stå här* se punkt i), punkt ii), punkt iii), punkt iv) samt punkt v).

---

<sup>18</sup> I grundskolans årskurser 1-3 skrivs ofta uppgifter som i exemplet med ett    (understreck), med en □ (ruta) eller med ett ? (frågetecken) istället för ett  $x$ , utifrån vad informanterna har beskrivit.



Begreppet differens/skillnad har en annan innebörd i det vardagliga språket än vad det har i matematiska sammanhang. Använder vi begreppet *differens* då vi kommunicerar med elever i undervisningen kan subtraktionsuppgifter och differens/skillnad kommuniceras som exempelvis:

- $x - 5 = 3$ , *differensen av/mellan x och fem är tre.*
- $8 - x = 3$ , *differensen av/mellan åtta och x är tre.*
- $8 - 5 = x$ , *differensen av/mellan åtta och fem är x.*<sup>19</sup>

Att se  $x$  som avstånd från  $b$  till  $a$  kräver att riktningens betydelse lyfts fram för att inte få differenser/skillnader med positiva värden då  $a < b$ , enligt mina tolkningar. Majoriteten av informanterna har beskrivit att de inledningsvis i undervisningen angående subtraktion och differens/skillnad undervisar om strategin *ta bort* oavsett subtraktionsuppgifters art. (I subtraktionsuppgifter som exempelvis  $5 - (-8) =$  fungerar det inte att tala om att *ta bort*. Subtraktionsuppgifter som denna förekommer dock inte i grundskolans årskurser 1-3.) En av informanterna har uttryckt att han/hon i den inledande undervisningen om differens/skillnad endast lyfter fram strategin *ta bort* för att informanten upplever att det förvirrar för elever att möta olika strategier för olika arter av subtraktionsuppgifter. Intressant är huruvida det förvirrar för elever att få lämpliga strategier för olika arter av subtraktionsuppgifter jämfört med att endast få en strategi som kan vara omständlig för en viss typ av subtraktionsuppgifter.

Då undervisningen om differens/skillnad delas upp i en sorts kronologisk ordning kan det vara svårt för elever att urskilja sambanden och skillnader mellan olika aspekter och strategier för subtraktion och differens/skillnad. I den inledande undervisningen om differens/skillnad används ofta tal inom talområdet 0-10, enligt vad informanterna har beskrivit. Det innebär att det inte blir tydligt för elever att strategin *ta bort* inte alltid är lämplig. Att endast en strategi används till alla typer av subtraktionsuppgifter för att finna differens/skillnad innebär att elever måste lära och tänka om då exempelvis strategin *komplettera* presenteras. Några av informanterna har beskrivit att de lyfter fram sambanden mellan addition och subtraktion genom att dela upp tal. Enligt min tolkning ger det elever möjligheter att se samband mellan addition och subtraktion då de beräknar subtraktionsuppgifter för att finna differens/skillnad med lämpliga strategier samt för att kunna kontrollera sina beräkningar.

## Hur uppfattar lärarna fenomenet differens/skillnad?

Informanterna har beskrivit sin undervisning beträffande subtraktion och differens/skillnad som bland annat *något som minskar, något man tar bort, att man går nedåt eller man hoppar bakåt*. Dessa uttalanden har tolkats och analyserats till en kategori med rubriken *som riktning från minuenden till subtrahenden*.

I: Hur skulle du välja att introducera det eller undervisa om det?

Lärare II: [...] Mm, ja... jag skulle säkert börja med alltså att ta bort fem.

Det tror jag.

I: Mm.

Lärare II: Ää om alltså som första grej skulle jag säkert göra så. Alltså ha åtta saker och så nu ska du typ ta bort fem.

---

<sup>19</sup> I exemplen har statistiska förhållanden valts och differensen uttrycks därmed som är och inte som blir. Fler subtraktionsuppgifter skulle kunna exemplifieras. Exempelvis kan subtraktionsuppgifter likvälskrivas som  $3 = x - 5$ .

Informanten har gett uttryck för att själv uppfatta fenomenet differens/skillnad *som riktning från subtrahenden till minuenden*, men undervisar subtraktionsuppgifter som  $8 - 5 =$  i den inledande undervisningen *som riktning från minuenden till subtrahenden*.

Lärare II: Ää och sedan försöka få dem att förstå själva, men vi har ju en tallinje som går nedåt med negativa tal...

I: Mm.

Lärare II: [...] så då skulle jag visa på den.

I: Ja.

Lärare II: [...] fem och så kanske vi backar åtta steg...

I: Mm.

Lärare II: Då ser vi att vi kommer liksom nedåt.

Här är det subtraktionsuppgiften  $5 - 8 =$  som har exemplifierats. Informanten har gett uttryck för att själv uppfatta fenomenet differens/skillnad *som riktning från minuenden till subtrahenden* vid subtraktionsuppgifter som nämnd uppgift och skulle också undervisa på samma sätt.

Lärare VIII: Det kan väl vara så att först så att man hoppar och vad man utgår ifrån och så. Och sedan så om det är åtta [och] ta bort fem så visar vi var vi är. Att vi är på åtta och tar bort fem. Då hoppar vi fem bakåt. Så har det kunnat se ut till exempel.

Informanten har gett uttryck för att själv uppfatta fenomenet differens/skillnad *som riktning från subtrahenden till minuenden*, men undervisar i den inledande undervisningen om subtraktion utifrån *som riktning från minuenden till subtrahenden*. I citatet har informanten beskrivit att en tallinje används för att lösa subtraktionsuppgiften genom att ”ta bort fem steg”.

*Något som minskar, något man tar bort, att man går nedåt* indikerar aspekten och strategin *ta bort*. Aspekterna *jämföra* och *komplettera* stämmer inte överens med det sättet att uttrycka sig beträffande differens/skillnad. *Man hoppar bakåt* indikerar en riktning som skulle kunna gälla då en golvlinje används, enligt tolkningen. Beroende på hur elever står på golvlinjen kan dock detta ses från olika synvinklar. Uttrycket kan även tolkas som att en tallinje eller termometer används och att minuenden är utgångspunkten i subtraktionsuppgifter som exempelvis  $8 - 5 =$ . Därmed sker en nedräkning från åtta till tre, enligt hur informanterna har beskrivit situationer i undervisningen vid intervjuerna. Uttrycket *skulle* också kunna tolkas som att elever ska utgå från minuenden med en rörelse på en tallinje och ta sig till subtrahenden (talet 5). Samma informanter som har uttryckt att man går åt ett håll vid addition (mot tal med högre värde) och ett annat håll vid subtraktion (mot tal med lägre värde) utgår från subtrahenden vid subtraktionsuppgifter som  $8 - 5 =$  och går därmed mot tal med högre värde.

De informanter som har uttryckt differens/skillnad som *biten* eller att *jämföra en längd* (magnitud) i sin undervisning har tolkats och analyserats till en kategori med rubriken *som riktning från minuenden till subtrahenden eller som riktning från subtrahenden till minuenden*.

Lärare VI: Hit upp var det åtta steg [ $8 - 5 =$ ]. Vad är det då som är skillnaden?  
Jo det är den här biten som är skillnaden. Den här biten på talraden.

Informanten har gett uttryck för att själv uppfatta fenomenet differens/skillnad enligt de tre beskrivna kategorierna. Då informanten har diskuterat *skillnaden* har informanten gett uttryck för att uppfatta fenomenet differens/skillnad *som riktning från minuenden till subtrahenden eller som riktning från subtrahenden till minuenden*.

Lärare II: Då skulle jag rita två pennor.  
I: Jaa.  
Lärare II: Och så kanske... den här är åtta och den här är fem. Hur mycket längre är den här pennan?  
I: Jaa, ok så då pratar du om längden?

Informanten har gett uttryck för att själv uppfatta fenomenet differens/skillnad utifrån samtliga tre beskrivna kategorier och då informanten har beskrivit sin undervisning i jämförelsesituationer har han/hon beskrivit att han/hon undervisningen lyfter fram differens/skillnad *som riktning från minuenden till subtrahenden eller som riktning från subtrahenden till minuenden*.

Det som av informanterna har uttalats som att *det spelar ingen roll var man börjar* eller att man skulle kunna *jämföra två tal och ha antingen minuenden eller subtrahenden som utgångspunkt* för differensen/skillnaden, har även det tolkats och analyserats till kategorin med rubriken *som riktning från minuenden till subtrahenden eller som riktning från subtrahenden till minuenden*.

I: Är det någon skillnad att gå från fem till åtta eller från åtta till fem?  
Lärare VI: Nej nej.  
I: Vad tänker du om det och hur undervisar du om det?  
Lärare VI: Nej där går jag... gör jag nog... att det inte är någon... skillnad.  
Att egentligen... för jag kan räkna baklänges sedan också. För du har ju åtta där, fem där och det är de här stegen som är skillnaden. Då spelar det ju inte någon roll åt vilket håll. [...]

För kategorin *som riktning från subtrahenden till minuenden* har informanterna beskrivit sin undervisning genom uttryck som bland annat *göra om till addition, räkna uppåt, ta det sista, gå från det lägsta till det största*. Dessa uttalanden har tolkats och analyserats till en kategori för differens/skillnad med rubriken *som riktning från subtrahenden till minuenden*.

Lärare II: Alltså att ställa sig på femman och titta upp mot åttan och göra om det till addition... också...  
I: Jaa.  
[...]  
Lärare II: Alltså det... de där talen är ju ganska nära varandra. Dessutom så tycker jag att strategin är bättre att börja på fem och räkna upp till åtta.

Informanten har i citatet tydligt talat om att utgå från subtrahenden innebär att det är räknesättet addition som används, att talen i subtraktionsuppgiften är nära varandra ur ordinalitetsperspektiv samt att det är en lämpligare strategi för subtraktionsuppgifter som exempelvis  $8 - 5 =$ .

Lärare III: När vi går från det konkreta materialet till att klara det mer bara på papper så är det okej att räkna uppåt också så då lär jag dem också att det går att ta det sista. Det behöver inte [meningen fullföljs inte]. Det lägsta och räkna upp... till det stora. Aa. Mm.

Informanten har gett uttryck för att uppfatta fenomenet differens/skillnad enligt den första och tredje kategorin. I citatet har informanten beskrivit att beroende på vilket materiel som används styr det hur samma subtraktionsuppgift beräknas.

## Sammanfattning

Majoriteten av informanterna har beskrivit att de undervisar om differens/skillnad och subtraktionsuppgifter som exempelvis  $8 - 5 =$  i den inledande undervisningen för grundskolans elever i årskurserna 1-3 enligt kategorin *som riktning från minuenden till subtrahenden*. Det innebär att det är aspekten och strategin *ta bort* som lyfts fram i den inledande undervisningen oavsett

subtraktionsuppgifters art. Utifrån vad informanterna har beskrivit presenteras subtraktionsuppgifter oftast som  $a - b = x$ . Aspekten *jämföra* och strategin *komplettera* lyfts fram senare i undervisningen.

Samtliga informanter har gett uttryck för att de uppfattar fenomenet differens/skillnad enligt kategorin *som riktning från minuenden till subtrahenden*. Dock skiljer uppfattningen beroende på subtraktionsuppgiftens art. Få av informanterna har gett uttryck för att de uppfattar fenomenet differens/skillnad enligt kategorin *som riktning från minuenden till subtrahenden eller från subtrahenden till minuenden*. Samtliga informanter har gett uttryck för att de uppfattar fenomenet differens/skillnad enligt kategorin *som riktning från subtrahenden till minuenden*, men få av informanterna undervisar elever utifrån den uppfattningen och strategin i den inledande undervisningen. Utifrån subtraktionsuppgiften  $5 - 8 =$  har samtliga informanter gett uttryck för att uppfatta fenomenet differens/skillnad *som riktning från minuenden till subtrahenden*. Samtliga informanter som undervisar om subtraktionsuppgifter som exempelvis  $5 - 8 =$  undervisar utifrån hur de själva uppfattar fenomenet differens/skillnad för nämnd subtraktionsuppgift.

# Kapitel 5 Diskussion

Avsikten med undersökningen har varit att bidra med kunskap om hur lärare uppfattar fenomenet differens/skillnad. I detta kapitel har resultatet utifrån undersökningens forskningsfrågor, syften och teoretiskt perspektiv med tidigare forskning jämförts och diskuterats. De slutsatser som har gjorts har beskrivits samt vilken betydelse dessa resultat kan tänkas ha för undervisning av elever i grundskolans årskurser 1-3 beträffande subtraktion och fenomenet differens/skillnad.

## Hur beskriver lärarna sin undervisning om fenomenet differens/skillnad?

De flesta av informanterna har beskrivit att subtraktion och differens/skillnad lyfts fram senare i undervisningen än addition. Då differens/skillnad lyfts fram i undervisningen har de flesta av informanterna beskrivit att aspekten och strategin *ta bort* behandlas först och därefter aspekten *jämföra* och strategin *komplettera*. I sammanhanget finner jag det intressant att tidigare forskning visar att elever uppfattar subtraktion som svårare än addition (Ball, 1993; Bentley, 2011; Frisk, 2009; Johansson, 2011; Larsson, 2010; Löwing, 2008; Olteanu et al., 2012). Löwing (föreläsning, 20 april, 2015) menar att matematikområden inte ska ses som isolerade öar. Elever måste ges möjlighet att se sambanden i matematik (ibid.). Min reflektion kring detta är att då undervisningen om räknesätten delas upp i en sorts kronologisk ordning kan det vara svårt för elever att urskilja sambanden och skillnader mellan olika aspekter och strategier för räknesätten och exempelvis differens/skillnad.

Några av informanterna har lyft fram att de synliggör sambanden mellan addition och subtraktion genom att dela upp tal. Olteanu et al. (2012) stöder detta att sambanden mellan de båda räknesätten synliggörs. Olteanu et al. (2012) menar att det inom forskningsfältet om subtraktion urskiljs två huvudlinjer varav det första är att förstå att addition och subtraktion är varandras inverser. Jag vill lyfta fram att trots att de två räknesätten addition och subtraktion är varandras inverser, gäller den associativa lagen och den kommutativa lagen endast för addition och *inte* för subtraktion. Lagarnas innebörder och när de är giltiga är inget som informanterna har beskrivit att de lyfter fram i sin undervisning. Både Löwing (föreläsning, 20 april, 2015) och Ma (1999) menar att räknelagar och regler måste lyftas in i den grundläggande undervisningen.

Några av informanterna har diskuterat att läsriktningen påverkar hur elever lyckas beräkna subtraktionsuppgifter för att finna differensen/skillnaden. Informanterna har uttryckt sig som att elever måste kunna att det är ”det första och största som vi har” och att det är det talet (här menar informanterna minuenden, enligt min tolkning) elever ska utgå från då de beräknar subtraktionsuppgifter för att finna differensen/skillnaden. Enligt min uppfattning kan ett sådant uttalande skapa missuppfattningar då det inte stämmer för subtraktionsuppgifter där  $a < b =$  då är inte ”det första (talet) det största”. Då utgör tänket ”störst först” en kritisk aspekt. Informanter som har lyft fram att läsriktningen påverkar elevers möjligheter att beräkna subtraktionsuppgifter undervisar elever om strategin att utgå från subtrahenden till minuenden i subtraktionsuppgifter som  $8 - 5 =$ . Då subtrahenden i den nämnda subtraktionsuppgiften är utgångspunkt används strategin *komplettera*. Då strategin *komplettera* används utförs beräkningen med räknesättet addition. På vilket sätt läsriktningen påverkar elevers möjligheter att beräkna subtraktionsuppgifter kan därmed vara svårt att motivera. Dels utifrån att det i många subtraktionsuppgifter kan vara lämpligt att utgå från subtrahenden och dels

att vi kan ha elever från kulturer där läsriktningen är en annan än den i Sverige. Läsriktningen påverkar följaktligen inte hur fenomenet differens/skillnad urskiljs eller inte urskiljs. Däremot benämner vi i Sverige subtraktionsuppgifter som exempelvis  $8 - 5 =$  genom att börja läsa utifrån minuenden. Informanternas uttalanden angående läsriktningen har tolkats av mig som att elever läser eller kanske ännu mer vanligt skriver exempelvis subtraktionsuppgiften  $8 - 5 =$  som  $5 - 8 =$ .

Samma informanter som har uttryckt att man går åt ett håll vid addition (mot tal med högre värde) och ett annat håll vid subtraktion (mot tal med lägre värde) utgår från subtrahenden vid subtraktionsuppgifter som  $8 - 5 =$  och går därmed mot tal med högre värde. Om det i undervisningen med exempelvis tallinje som tankeredskap lyfts fram att addition beräknas genom en riktning mot tal med högre värde och subtraktion beräknas genom en riktning mot tal med lägre värde kan det förvirra om det inte diskuteras och lyfts fram vad som avses med ett sådant uttalande.

Då informanterna har beskrivit sin undervisning om differens/skillnad används inte matematiska begrepp konsekvent. De matematiska begrepp som används är få och ofta används ett vardagligt språk. En förutsättning för att elever ska kunna fördjupa sina kunskaper och komma vidare är att elever ges möjlighet att abstrahera och använda ett matematiskt språk så tidigt som möjligt (Altiparmak et al., 2010; Ball et al., 2005; Karlsson et al., 2014; Kilhamn, 2011; Ma, 1999). Bentley (2008) lyfter fram att begrepp ofta förenklas i skolans matematik i kontrast till den akademiska matematiken. Enligt Kinard et al. (2012) befinner sig matematikundervisning i en svårare position än andra discipliner då allt inom matematiken grundar sig på ett särskilt symbolspråk. Det framgår av kursplanens syftestext i matematik att elever bland annat ska ges möjlighet att utveckla förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp och metoder samt deras användbarhet. Elever ska utveckla förmågan att argumentera logiskt och föra matematiska resonemang. De ska också utveckla en förtrogenhet med matematikens uttrycksformer och hur dessa kan användas för att kommunicera i vardagliga såväl som matematiska sammanhang. Detta är förmågor och kunnande som elever ska ges möjlighet att utveckla och erövra under hela grundskolan. Dessa förmågor och detta kunnande ska bedömas under hela grundskolan (Skolverket, 2011). Mina reflektioner är att elever som ges möjligheter att använda korrekta matematiska begrepp, metoder och uttrycksformer i den inledande undervisningen kommer därmed att ha fler möjligheter att utveckla sina förmågor och sitt kunnande i matematik. Utifrån den forskning jag har tagit del av och refererat till i denna uppsats är min tolkning att elever ges större möjligheter i undervisningen att urskilja det precisa som avses i exempelvis en kommunikation om differens/skillnad om det vid undervisningen används korrekta matematiska begrepp som exempelvis differens, minuend och subtrahend.

Undersökningens resultat har visat att differens/skillnad lyfts fram av informanterna som ”lösningen” och oftast i subtraktionsuppgifter som  $a - b = x$ . Resultatet av en subtraktion kallas *differens* eller *skillnad* och betyder olikhet eller skillnad (Kiselman et al., 2008). Karlsson et al. (2014) menar att subtraktion generellt handlar om *differens* där subtraktionen  $x = a - b$  har innebörden  $b + x = a$  och  $x$  är avståndet från  $b$  till  $a$ . Att se  $x$  som avstånd från  $b$  till  $a$  kräver att riktningens betydelse lyfts fram för att inte få differenser/skillnader med positiva värden då  $a < b$ , enligt mina uppfattningar. Det stöds även av Altiparmak et al. (2010), Ball (1993), Bentley (2008), Kilhamn (2011) samt av Kullberg (2010).

Informanterna har beskrivit att de inte kommunicerar med elever om de olika metaforernas eller modellernas lämplighet och generaliserbarhet. Detta att lärare inte kommunicerar olika metaforers eller modellers begränsningar och generaliserbarhet har Ball (1993), Karlsson et al. (2014) samt Kilhamn (2011) lyft fram och menar att dessa begränsningar och generaliseringar måste kommuniceras med elever.

Undersökningens resultat har visat att det konkreta materialet som väljs ut i den inledande undervisningen för att påvisa strategier att beräkna subtraktionsuppgifter kan styra det matematiska innehållet. Utifrån vad informanterna har beskrivit har jag tolkat det som att så kallade plockisar ofta styr in på strategin *ta bort* och att beräkna subtraktionsuppgifter med hjälp av en tallinje ofta styr in på att beräkna subtraktionsuppgifter genom strategin *komplettera*. Att använda konkret materiel då subtraktionsuppgifter som  $8 - 5 =$  ska beräknas genom att först räkna fram åtta föremål för att sedan räkna fem föremål som ska *tas bort* vill jag lyfta fram att det kan innebära en risk att elever inte uppfattar aspekten och strategin *ta bort* då de endast räknar föremål en till en och räkneramsan framåt. Ma (1999) har i sin forskning sett att konkret/laborativt materiel inte alltid visar den matematiska idén.

Utifrån vad informanterna har beskrivit samt den forskning jag har refererat till vill jag lyfta fram att om strategin *ta bort* används oavsett subtraktionsuppgifters art kan det bidra till att elever inte urskiljer då olika strategier kan vara lämpliga för olika typer av subtraktionsuppgifter. Min uppfattning är att strategin *komplettera* behöver lyftas fram även i den inledande undervisningen och synliggöras för att elever ska kunna generalisera strategin då subtraktionsuppgifter inom ett större talområde beräknas. *Komplettera* är en lämplig strategi vid jämförelsesituationer. Just jämförelsesituationer har visat vid TIMSS 2007 att det uppstår svårigheter för svenska elever att genomföra beräkningar (Fuson, 1992). Forskning bekräftar att jämförelsesituationer är svåra för elever om de inte mött sådana uppgifter frekvent i undervisningen (ibid.).

Det som kan tyckas vara funktionellt och framgångsrikt i grundskolans årskurser 1-3 kan dessvärre leda till större problem senare (Altıparmak et al., 2010; Ball et al., 2005; Karlsson et al., 2014). Jag tänker att elever i grundskolans årskurser 1-3 kan klara relativt väl att beräkna olika subtraktionsuppgifter den tid de går i årskurserna 1-3. Däremot då eleverna möter subtraktionsuppgifter som  $81 - 79 =$  finns en risk att elever beräknar nämnd uppgift med strategin *ta bort* på grund av att det är den strategi som inledningsvis tas upp i undervisningen, oavsett subtraktionsuppgifters art. Det finns en risk att felaktiga beräkningar görs om strategin *ta bort* används vid subtraktionsuppgifter som  $81 - 79 =$ . Inte heller hjälper det elever att beräkna nämnd uppgift med en algoritm. Felaktiga beräkningar kan ändå göras. Exempelvis om elever tänker ”störst först”. En subtraktionsuppgift som  $81 - 79 =$  behöver inte beräknas med en algoritm då talen i uppgiften är nära varandra ur ordinalitetsperspektiv.

Då elever senare under sin skoltid möter negativa tal i subtraktionsuppgifter är strategin *ta bort* inte en generaliserbar strategi. Har elever dessutom hört att det ”inte går” att beräkna subtraktionsuppgifter som exempelvis  $5 - 8 =$  i grundskolans årskurser 1-3 kommer elever behöva få en annan uppfattning och därmed kan elever inte bygga vidare på tidigare uppfattningar och kunnande.

Metaforer, modeller eller konkret materiel som exempelvis termometer, tallinje eller plockisar och strategin *ta bort* fungerar inte alltid vid subtraktion med negativa tal (Ball, 1993). Man behöver tänka i termer av subtraktion som differens/skillnad (Kullberg, 2010). Kilhamn (2014) menar att tallinjen fungerar som modell att beräkna subtraktionsuppgifter med, men lärare och elever behöver vara överens om *hur* modellen fungerar. Därför måste lärare klargöra de överenskommelser som finns när det gäller att utföra beräkningar med hjälp av tallinjen. När tallinjen är en modell utifrån gemensamma överenskommelser och lärare och elever är trygga med tallinjen kan den användas för att skissa, visa strategier och beskriva resonemang. Tallinjen kan då utgöra ett redskap, en modell, för att tänka och kommunicera om tal (Kilhamn, 2014). Matematikundervisning befinner sig i en svårare position än andra discipliner även beträffande symboliska redskap. Det är svårt för elever, men även för lärare, att se skillnad mellan innehåll och redskap. Elever betraktar redskapen som delar av informationen och innehållet istället för som redskap för organisering och konstruktion av kunskap och förståelse (Kinard

et al., 2012). De begreppsmodeller som används i skolan ställer krav utifrån tre kriterier eller giltigheter som mäter kvaliteten på dessa begreppsmodeller. Den första och strukturella giltigheten relateras till hur väl modellen stämmer överens med den akademiska strukturen. Den ekologiska och andra giltigheten handlar om hur väl förtrogna eleverna är med den kontext som används. Slutligen handlar förenklingen om hur väl modellen fungerar att operera med (Bentley, 2008).

Då elever skriver subtraktionsuppgifter som  $5 - 8 =$ , men avser  $8 - 5 =$  lyfter några av informanterna fram subtraktionsuppgiften  $5 - 8 =$  i sin undervisning. Då informanterna undervisar om subtraktionsuppgiften utgår samtliga från minuenden och kommunicerar i termerna *ta bort* eller *backa* eller *gå bakåt*. För att visa att, som några av informanterna har uttryckt det, ”det går inte” att ta bort åtta föremål från fem börjar flera av informanterna med föremål vid subtraktionsuppgifter som  $5 - 8 =$ . Det kommuniceras som att det *inte fungerar*, *inte går* eller att *man blir skyldig*. Informanterna har uttryckt att de använder pengar eller plockisar för att påvisa att det inte går och övergår sedan till tallinjen eller termometern. I sin studie med åtta- och nioåringar lyfte Ball (1993) fram att en skuld kan vara svår för elever i grundskolans årskurser 1-3 att förstå. Att förstå att en skuld representerar ett negativt tal är inte helt enkelt då både storlek (magnitud) och värde måste urskiljas. Då redskap och modeller som tallinje eller termometer används genom att man utgår från minuenden kommuniceras det inte med elever att den strategin inte är generaliserbar (Kilhamn, 2011). Att beräkna eller visa exempelvis subtraktionsuppgiften  $5 - (-8) =$  på en tallinje eller en termometer och utgå från minuenden kommer inte att fungera. Bruno et al. (1999) lyfter fram att metaforer snarare bidrar till svårigheter än underlättar då elever ska operera med negativa tal. För att beräkna subtraktionsuppgifter av olika art krävs att lärare har den ämneskunskapen som gör att elever ges möjlighet att få generaliserbara strategier (Ball, 1993; Bentley, 2008; Ma, 1999). Ma (1999) lyfter fram att kinesiska lärare steg för steg kommunicerar de grundläggande idéerna i matematik med sina elever. Exempelvis ställer kinesiska lärare frågan: *Varför är det logiskt?* till elever och denna fråga anses av kinesiska lärare vara språngbrädan för begreppslig förståelse i matematik. Altiparmak et al. (2010) och Ball (1993) lyfter fram vikten av att sätta in negativa tal i elevers egen kontext. Bentley (2008) lyfter fram att hur väl förtrogna eleverna är med den kontext som används kommer att påverka elevers möjligheter att genomföra beräkningar. Då lärare i sin undervisning vill konkretisera uppgifter med subtraktion och negativa tal används ofta metaforerna eller modellerna tallinje, termometer, pengar (för exempelvis skuld) eller exempel med att åka hiss (Ball, 1993). Informanterna i undersökningen har nämnt just termometer och kallgrader som en lämplig metafor för elever i grundskolans årskurser 1-3 då undervisningen om differens/skillnad berör negativa tal. Ball (1993), Karlsson et al. (2014) och Kilhamn (2011) lyfter fram att termometer är en metafor som har begränsningar, trots att den är i en bekant kontext för elever. Bentley (2008) lyfter fram tallinjen som en modell för att exempelvis beräkna subtraktionsuppgifter med både positiva och negativa tal. En utvidgad tillämpning av tallinjen menar Bentley (2008) fungerar med hjälp av *vektorer*. En vektor har både riktning och längd. Riktningen betecknar om talet är positivt eller negativt och längden motsvarar talets magnitud. En vektor har en viss längd och en viss riktning, men man tar inte hänsyn till startpunkten (ibid.). Kilhamn (2011) lyfter fram att tallinjen kan fungera som modell, men på vilket sätt måste kommuniceras med elever och lyftas fram i undervisningen. Enligt Bentley (2008) är det oftast mer lämpligt att använda endast *en* modell för att representera ett matematiskt koncept då en del modeller motsäger varandra. Elevers förståelse för de matematiska begreppen beror på hur en modell används i undervisningen. Elevers förståelse för konceptet kommer att relateras till den modell som används (ibid.).



Jag tänker att då det inte kommuniceras om riktningens betydelse då subtraktionsuppgifter beräknas utan enbart vilket tal i subtraktionsuppgifter som är utgångspunkten och de antal steg som elever ska förflytta sig på exempelvis en tallinje ges det inte möjlighet för elever att urskilja att riktningen har betydelse för differensen/skillnaden. För att elever ska kunna förstå negativa tal och senare under sin skolgång kunna utföra matematiska operationer med negativa tal måste de ha getts möjlighet att urskilja att tal har *både* magnitud och värde (Altiparmak et al., 2010; Ball, 1993; Kilhamn, 2011; Kullberg, 2010). Ball (1993) och Ball et al. (2005) lyfter fram att lärare behöver sätta sig in i elevers perspektiv. Jag menar att det kan synas som att det tas för givet att elever ska urskilja riktningens betydelse för tals värde om det inte lyfts fram i undervisningen och kommuniceras med elever. Ball et al. (2005) lyfter fram att lärare måste välja användbara förklaringsmodeller och lyfta typiska missuppfattningar. För att lärare ska kunna analysera elevers svar krävs att lärare har nödvändig kunskap och fullständig förståelse för matematiska begrepp och dess innebörder (Bentley, 2008). Olteanu et al. (2012) menar att om lärare ges möjlighet att utveckla förmågan att identifiera kritiska aspekter i elevers lärande öppnas en dimension av variationer av dessa aspekter. Genom att lärare skulle tillämpa denna kunskap om kritiska aspekter i den dagliga undervisningen ges möjlighet för elever att utveckla sitt lärande (ibid.). Enligt Olteanu et al. (2012) behöver lärare fokusera på vilket sätt de använder forskning när de tolkar och svarar elever beträffande innehållet i lärandet och för att utveckla sin undervisning. För att lärare ska kunna hjälpa elever att lära sig exempelvis subtraktion och differens/skillnad behöver lärare identifiera de kritiska aspekterna för elevernas lärande och utifrån dessa variera på ett sätt så att eleverna erfar det som de måste urskilja. För att få en effektiv kommunikation i klassrummet behöver lärarna analysera tentativa kritiska aspekter och de verkliga kritiska aspekter som finns i respektive undervisningsgrupp för att finna korrelationen mellan det intentionella, iscensatta och erfarna lärandet. Det är ett kraftfullt verktyg för lärares reflektiva process att lärare fokuserar på att skapa en dimension av variationer av de kritiska aspekter som finns för respektive lärandeobjekt (ibid.). Stigler et al. (1999) lyfter fram att det är när lärare kommer samman och förbättrar sin undervisning som en kontinuerlig förbättring av undervisningen i klassrummen och av yrket sker.

### **Hur uppfattar lärarna fenomenet differens/skillnad?**

Samtliga informanter har gett uttryck för att uppfatta fenomenet differens/skillnad *som riktning från subtrahenden till minuenden* och *som riktning från minuenden till subtrahenden*. Uppfattningarna skiljer mellan olika informanter och olika subtraktionsuppgifter. För de flesta av informanterna finns inget samband mellan respektive informants egen uppfattning av fenomenet differens/skillnad och dess inledande undervisning om fenomenet. Respektive informants uppfattning är därmed inte en utgångspunkt som medvetet val av strategi i respektive informants undervisning om differens/skillnad. Det har synliggjorts då informanterna har beskrivit sin undervisning. Undervisningen om differens/skillnad sker hos de flesta av informanterna mer utifrån en viss ordning än utifrån lämpliga strategier för olika arter av subtraktionsuppgifter. Enligt Ma (1999) behöver de lärare som undervisar de yngsta eleverna en långsiktig koherens för att elever ska ges möjlighet att förvärva matematiska kunskaper som är generaliserbara. Lärare som undervisar äldre elever behöver långsiktig koherens för att ha förståelse för den kunskap elever förvärvade under tidigare årskurser (ibid.).

Två av informanterna har beskrivit att de undervisar om strategin *ta bort* för subtraktionsuppgifter då tal i subtraktionsuppgifter är långt från varandra, ur ordinalitetsperspektiv och strategin *komplettera* då tal i subtraktionsuppgifter är nära varandra ur ordinalitetsperspektiv. De två informanterna har inte kunnat beskriva på vilket sätt de kommunicerar de två olika strategierna med elever i undervisningen. Nämda informanter har inte heller kunnat motivera varför respektive strategi är lämplig för

respektive subtraktionsuppgifter. De två nämnda informanterna uppfattar fenomenet differens/skillnad enligt kategorin *som riktning från subtrahenden till minuenden* vid subtraktionsuppgifter som  $8 - 5 =$  och enligt kategorin *som riktning från minuenden till subtrahenden* vid subtraktionsuppgifter som  $8 - 3 =$  och  $5 - 8 =$ . Kinard et al. (2012) lyfter fram att i exempelvis länder som Australien, Belgien och Japan har 50 % av lågstadielärarna en högre examen eller specialutbildning i matematik. Då Ma (1999) har jämfört amerikanska lärares utbildning med kinesiska lärares utbildning har hon funnit att amerikanska lärare har fler år i sin utbildning jämfört med kinesiska lärare. I kinesiska lärares utbildning råder däremot långsiktig koherens. Lärare bör kunna hela grundskolans matematik (ibid.). Jag har noterat att det som skiljer mellan amerikansk lärarutbildning och kinesisk lärarutbildning kan gälla även vid en jämförelse mellan kinesisk lärarutbildning och svensk lärarutbildning.

Tre av informanterna har gett uttryck för att uppfatta fenomenet utifrån samtliga tre kategorier. Utifrån hur informanterna har beskrivit sin undervisning har det tolkats som att två av de tre kategorierna oftast lyfts fram i undervisningen. De kategorier berörda informanter oftast undervisar differens/skillnad utifrån är differens/skillnad *som riktning från minuenden till subtrahenden* oavsett subtraktionsuppgifters art och *som riktning från subtrahenden till minuenden* senare i undervisningen då minuenden och subtrahenden befinner sig nära varandra ur ordinalitetsperspektiv. Samtliga informanter har gett uttryck för att uppfatta differens/skillnad enligt kategorin *som riktning från minuenden till subtrahenden* vid subtraktionsuppgifter som exempelvis  $5 - 8 =$ . Ball et al. (2005) menar att matematikkunskaper för att kunna undervisa skiljer sig från de matematikkunskaper andra yrkeskategorier behöver. Först då läraren själv har förstått matematikämnets karaktär och innehåll samt har goda ämnesdidaktiska kunskaper och sätter detta i relation till hur en enskild elev uppfattar matematik i olika situationer uppstår god undervisning (Löwing et al., 2002).

## Slutsatser

Utifrån hur informanterna har beskrivit sin undervisning har tre kvalitativt skilda uppfattningar av fenomenet differens/skillnad urskiljts. Oavsett hur informanterna uppfattar fenomenet differens/skillnad och oavsett subtraktionsuppgifters art, möter deras elever i de flesta fall, fenomenet differens/skillnad i den inledande undervisningen enligt kategorin *som riktning från minuenden till subtrahenden*. Undersökningens resultat stöds därmed av det Murdiyani et al. (2013) har lyft fram att det tycks vanligast att lärare undervisar om fenomenet differens/skillnad i olika kontexter utifrån aspekten och strategin *ta bort*. Utifrån det informanterna har beskrivit diskuteras inte och lyfts inte heller fram varför strategin att utgå från subtrahenden kan vara mer lämplig vid en viss art av subtraktionsuppgifter. Elever behöver uppfatta fenomenet differens/skillnad *som riktning från subtrahenden till minuenden* för att kunna beräkna olika arter av subtraktionsuppgifter där strategin *komplettera* är mer lämplig. För subtraktionsuppgifter där minuenden och subtrahenden är långt ifrån varandra, ur ordinalitetsperspektiv, är *ta bort* en mer lämplig strategi. Elever behöver för denna typ av uppgifter uppfatta fenomenet differens/skillnad *som riktning från minuenden till subtrahenden*. Då elever urskiljer fenomenet differens/skillnad enligt kategorin *som riktning från subtrahenden till minuenden* samt att riktningen är av betydelse ges möjligheter att utföra beräkningar för subtraktionsuppgifter, oavsett subtraktionsuppgifters art.

Undersökningen har även visat att informanterna har beskrivit att konkret materiel används i den inledande undervisningen. Ma (1999) menar att konkret/laborativt materiel inte alltid visar den matematiska idén, vilket även den här undervisningen visar då konkret materiel används för att beräkna subtraktionsuppgifter. Då plockisar används för att beräkna subtraktionsuppgifter och

strategin *ta bort* används endast metoden att räkna upp ”en till en”. Därmed ges elever inte möjlighet att få syn på den innebörd subtraktion kan ha. Undersökningen har också visat att det konkreta materiel som väljs ofta styr vilken strategi som används då subtraktionsuppgifter ska beräknas.

Ett korrekt matematiskt språk för differens/skillnad används inte i den inledande undervisningen utan det är oftast ett vardagligt språk som används av informanterna, enligt vad informanterna har beskrivit. Mina slutsatser utifrån den forskning jag har refererat till är att ett korrekt matematiskt språk är en hjälp att urskilja det precisa som avses i matematiska sammanhang. Det ger också möjlighet till ett gemensamt språk för att exempelvis argumentera och föra matematiska resonemang.

Utifrån vad informanterna har beskrivit under intervjuerna har undersökningens resultat visat att olika informanter undervisar utifrån olika strategier oavsett vilken uppfattning informanten själv har. Det kan innebära att olika elever möter olika strategier för samma art av subtraktionsuppgifter i undervisningen om differens/skillnad. Det i sin tur kan innebära att det ges olika möjligheter för elever att urskilja olika innebörder av fenomenet differens/skillnad. Det är av vikt att notera att denna slutsats har gjorts utifrån vad informanterna har beskrivit. Det behöver inte innebära att verkligheten är så i respektive informants undervisning.

## Betydelse

Denna undersökning har samlat data från åtta informanter. Antalet informanter i kombination med att tolkningen har genomförts utifrån en fenomenografisk ansats bidrar till att resultatet inte kan åberopa ett generaliserbart resultat. Dock kan undersökningens resultat *möjligen* belysa något inom subtraktionsområdet och differens/skillnad som skulle kunna komma lärare och elever till gagn.

Undersökningens resultat har belyst ett område som behöver och kan utvecklas. En konsekvens som undersökningens resultat skulle kunna bidra med är att resultatet kan synliggöra för lärare vad de kan ge elever möjlighet att urskilja inom subtraktionsområdet beträffande innebörder av fenomenet differens/skillnad.

Resultatet skulle även kunna bidra till fortsatt forskning inom det subtraktionsområde som berörs i undersökningen. Exempelvis skulle en undersökning med ett större underlag och kompletterande datainsamling kunna genomföras för att åberopa ett mer generaliserbart resultat.

## Reflektion över forskningsprocessen

De forskningsfrågor och de syften som undersökningen har fokuserat har reviderats och utvecklats ett flertal gånger under forskningsprocessen. Fejes et al. (2015) lyfter fram just det att forskningsfrågor och syften vanligtvis omformuleras under en forskningsprocess.

Datainsamlingen har skett genom halvstrukturerade kvalitativa intervjuer med ljudupptagning. Ljudupptagningarna har sedan transkriberats. Metoden har fungerat väl för att tolka och analysera informanternas kvalitativt skilda uppfattningar av fenomenet differens/skillnad. För att besvara forskningsfrågorna har min uppgift varit att tolka och analysera *vad* informanterna har uttalat för att försöka finna *hur* informanterna uppfattar fenomenet differens/skillnad. Därmed har en fenomenografisk ansats setts som ett lämpligt val för undersökningen.

De transkriberade intervjuerna har lästs om och om igen. *Möjliga* uppfattningar av fenomenet differens/skillnad har markerats med överstrykningspenna. Utifrån dessa överstrykningar har det

upptäckts att markeringar har gjorts för uppfattningar av subtraktion och därmed inte alltid uppfattningar av det fenomen som avsågs att undersöka.

Undersökningens resultatet kan ha påverkats av ett flertal aspekter. Att intervjua informanter inom ett område som är väl bekant för intervjuaren utgör en risk att för-givet-taganden görs. Vid avlyssning och analys av intervjuer har det upptäckts att det kan ha varit för-givet-taganden som legat till grund att inte fördjupande och uppföljande frågor ställts. Andra anledningar kan ha varit att jag inte har lyssnat tillräckligt noga eller varit tillräckligt mentalt närvarande. Larsson (1986) lyfter fram man inte är fördomsfri då man tolkar data från kvalitativa intervjuer. Det har även blivit tydligt under intervjuerna att det krävs ämneskunskaper inom det område intervjuerna sker. Även om det föreligger en risk för att för-givet-taganden görs kan å andra sidan djupa ämneskunskaper möjliggöra att fler och mer fördjupande uppföljande frågor kan ställas. Larsson (1986) samt Kvale et al. (2014) lyfter fram att det ställs krav på intervjuaren visavi kunskaper i ämnet. Jag har lyft fram att för-givet-tagande kan tas just utifrån att ämneskunskaper finns, men jag vill ännu en gång betona att ämneskunskaper är viktiga för att kunna ställa fördjupande frågor. Jag har funderat på huruvida mina frågor skulle ha kunnat få ytterligare uttömmande svar om jag själv haft ännu mer gedigna kunskaper inom detta matematiska område. Ytterligare aspekter som kan ha påverkat resultatet kan vara min förmåga att lyssna, tolka och analysera.

Det ger både intervjuaren och informanterna möjlighet att lära nytt under respektive intervju, vilket Kvale et al. (2014) samt Starrin et al. (1996) lyfter fram. Flera av informanterna i undersökningen har fått syn på något under intervjuerna. Denna tolkning har grundats utifrån uttryck som: ”Ja, men det blev ju jätteintressant med intervjuer” (Lär VI). ”Gud vilken svår fråga” (Lär VIII). Speciellt då subtraktionsuppgiften  $5 - 8 =$  har visats har några av informanterna i undersökningen uttryckt att de inte riktigt vet varför de ändrar strategi jämfört med subtraktionsuppgiften  $8 - 5 =$ . ”Vad intressant! [...] Gud så förvirrat! Jag har ingen... Jag har ingen lösning hur man ska göra” (Lär VI).

Det kan inte med säkerhet uttalas om huruvida de frågor som ställts i intervjun har uppfattats så som var avsett. Då intervjuerna avlyssnats och transkriberingarna lästs har det upptäckts att jag vid något tillfälle tenderat att ställa en ledande fråga. Min tolkning har varit att jag kommit på sig själv under intervjun och försökt korrigera frågan till en öppen fråga. Styrkan med halvstrukturerade kvalitativa intervjuer där frågorna är öppna är att respektive informant ges utrymme att fritt beskriva kring fokusområdet. Enligt Kvale et al. (2014) ställs det krav på intervjuaren att leda intervjuerna och hålla i fokusområdet för att fokusområdet inte ska förloras.

Att den inledande intervjufrågan har fokuserat subtraktionsområdet har fått den konsekvensen att det tagit tid innan intervjun kom till frågor som har berört forskningsfrågan angående uppfattningar av fenomenet differens/skillnad. Intervjuerna har legat nära varandra i tid och trots att jag under denna process har reflekterat och utvecklat intervjuguiden skulle den ha behövts utvecklas ytterligare för att tidigare ha kommit till forskningsfrågan angående uppfattningar av fenomenet differens/skillnad.

Att använda sig av *icke-verbal probing* genom att humma eller nicka menar Dahlgren et al. (2015) samt Starrin et al. (1996) kan medverka till att informanter utvecklar sitt svar eller beskriver sina uppfattningar ytterligare. Såväl under intervjuerna som vid transkriberingarna har jag noterat att jag oftast gav respektive informant respons genom att säga *mm*. Jag har innan intervjuerna funderat på hur jag skulle förhålla mig för att visa intresse, men inte lotsa informanternas svar. När jag har analyserat transkriberingarna har jag funderat över huruvida att uttrycka *mm* eller *ja* kan ha påverkat informanterna så till vida att det kan ha uppfattats som att jag har samstämt med det informanterna beskrivit eller uttryckt.

Andra aspekter att ta hänsyn till är hur väl informanterna kommit ihåg hur de undervisar samt hur mycket de velat delge av sin undervisning. Intervjuerna har inletts med samtal om annat än fokusområdet för intervjuerna med anledning att skapa en avslappnad stämning. Det har dock inte med säkerhet gått att säga att inte respektive informant upplevt en viss stress under intervjuerna. Dels beroende på att ljudupptagning skett, men eventuellt också för vad som skulle komma att synliggöras under intervjuerna. Trots att en pilotstudie med två informanter har gjorts för att pröva intervjuguiden har intervjuerna fortsatt att utvecklas under undersökningens gång. Starrin et al. (1996) lyfter fram att det är mer komplicerat att konstruera frågeställningar i en kvalitativ intervju jämfört med en kvantitativ intervju. För att en intervju ska ha en hög kvalitet krävs omfattande träning (Kvale et al., 2014). Jag har under undersökningens process utvecklat mitt sätt att ställa fördjupande frågor, vilket också blivit tydligt då intervjuerna tagit längre och längre tid.

Jag har genomfört en undersökning utifrån en kvalitativ metod. Det jag har reflekterat kring är att jag i resultat ibland skrivit antal informanter som gett uttryck för olika beskrivningar och uppfattningar. Jag har även redovisat resultat i tabeller där kvantitet avges. Allt detta kan indikera och styra läsaren till att se resultatet som ett kvantitativt resultat. Det har inte varit min avsikt.

Min ambition har varit att vara så transparent som möjligt då resultatet delgetts och bland annat på dessa grunder har citat från flera informanter än endast två tagits med under någon kategori. Då reliabiliteten inte är så hög beroende på att det endast är jag ensam, som utfört tolknings- och analysarbetet ger en större transparens en möjlighet för läsaren att kritiskt granska mina analyser och därmed undersökningens resultat.

Att forskningsfrågorna ska ha lett till undersökningens syften har krävt en hel del av mig. Både i avseende att ställa relevanta frågor för att synliggöra informanternas uppfattningar av fenomenet differens/skillnad samt att tolka och analysera informanternas uttalanden. Ytterligare krav för att forskningsfrågorna ska ha lett till undersökningens syften har varit att det krävt både ämneskunskaper och ämnesdidaktiska kunskaper vid såväl tolknings- och analysarbetet som vid kategoriseringar. Resultatet är helt hänvisat till mina kunskaper inom undersökt område. Att tolkningen påverkas av forskarens matematiska kunskaper är något Bentley (2008) lyfter fram. Alla eventuella faktafel i uppsatsen är jag helt ensam ansvarig för.

Mitt uppdrag har varit att tolka vilka uppfattningar informanterna gett uttryck för. Dock har kategoriseringarna konstruerats efter tolkning och analys av informanternas uttalanden, men hänsyn har även tagits till tidigare forskning. Ytterligare aspekter som kan ha påverkat resultatet är mina ämneskunskaper inom undersökt område samt min erfarenhet att göra analyser utifrån en fenomenografisk ansats. Om en annan person skulle ha tolkat, analyserat och kategoriserat informanternas uttalanden hade utfallsrummet och resultatet kunnat vara annorlunda. För att stärka reliabiliteten har jag önskat att fler personer deltagit vid analysarbetet, tolkningen samt vid kategoriseringen.

Vid analysarbetet har ingen hänsyn tagits till informanternas antal år att undervisa. Enbart *vad* informanterna uttalat har legat till grund för tolkning och analys av *hur* informanterna uppfattar fenomenet differens/skillnad.

Det har varit enklare än vad jag anade att få rektorer och informanter positiva till att ställa upp på intervjuer. De inplanerade intervjuerna har kunnat äga rum då jag och respektive informant bokade in en intervju. Endast en informant har behövt ändra datum och intervjun har ändå ägt rum inom planerad tidsram.

Om ytterligare en undersökning skulle göras utifrån samma forskningsfrågor skulle undersökningen kunna kompletteras med fler underlag för insamling av data. En lämplig metod för datainsamling skulle kunna vara att genomföra filminspelade lektionsobservationer för att ta del av och försöka få syn på det informanterna uttalat under intervjuerna. En sådan undersökning är då beroende av att finna informanter som kan tänka sig att ställa upp i intervjuer *och* samtycka till filminspelade lektionsobservationer. Då filminspelade lektionsobservationer genomförs behöver även missivbrev utgå till föräldrar och vårdnadshavare så att eventuellt samtycke kan ges. Huruvida föräldrar och vårdnadshavare samtycker påverkar därmed också möjligheter att finna informanter och klasser för att genomföra filminspelade lektionsobservationer.

En stor mängd av relevant och intressant forskning finns att ta del av angående subtraktion och differens/skillnad. En svårighet under undersökningens process har varit att avgränsa underlaget.

Ända in i slutskedet av uppsatsens färdigställande har jag återkommit till transkriberingarna och reviderat kategorierna. Forskningsprocessen har tagit mycket tid, men varit oerhört givande, lärorik och utmanande. Möjligheten att studera differens/skillnad djupare i såväl nationell som internationell forskning, få ta del av hur informanterna har beskrivit sin undervisning samt få ta del av hur informanterna uppfattar fenomenet differens/skillnad har bidragit till ett ökat lärande för mig inom subtraktionsområdet och differens/skillnad.

## Nya frågor/vidare forskning

Utifrån denna undersökning finns en möjlighet att komplettera undersökningen med filminspelade lektionsobservationer. Även ytterligare undersökningar inom området skulle kunna utföras. Möjliga forskningsfrågor skulle kunna vara:

Utifrån hur informanterna har beskrivit sin undervisning angående fenomenet differens/skillnad:

- vad lyfts fram i undervisningen angående fenomenet differens/skillnad?<sup>20</sup>

Utifrån hur informanterna uppfattar fenomenet differens/skillnad:

- på vilket sätt synliggörs innebörden av fenomenet differens/skillnad i undervisningen?

Utifrån hur informanterna uppfattar fenomenet differens/skillnad:

- på vilket sätt påverkar lärares uppfattningar av fenomenet differens/skillnad elevers uppfattningar av samma fenomen?

Ytterligare forskning skulle kunna genomföras utifrån att lärare deltar i Learning Studies inom subtraktionsområdet och fenomenet differens/skillnad och därefter utföra jämförande undersökningar med lärare som har deltagit i Learning Studies med lärare som inte har deltagit i Learning Studies för att synliggöra om undervisningen om fenomenet differens/skillnad skiljer sig åt och i sådant fall på vilket sätt.<sup>21</sup>

---

<sup>20</sup> En sådan undersökning och forskningsfråga kräver att informanter samtycker till att delta i intervjuer med ljudupptagning samt att informanterna samtycker till filminspelade lektionsobservationer.

<sup>21</sup> Att Learning Studies nämns i sammanhanget grundar sig på att i utvecklingsarbeten, med Learning Study som modell, ges lärare möjlighet att i ett kollegialt sammanhang med externt stöd och forskning fördjupa sig i sin egen undervisning och få syn på vad som gör skillnad för elevers lärande. Utvecklingsarbeten i kollegiala sammanhang för att lärare ska ges möjlighet att fördjupa sina ämneskunskaper och upptäcka kritiska aspekter stöds av Kullberg (2010), Lo (2012), Marton & Runesson (2015), Olteanu & Olteanu (2012) och Stigler & Hiebert (1999).

Bedömningen av hur väl jag har lyckats svara på forskningsfrågorna har grundats utifrån min ämneskunskap och förmåga att utföra en undersökning med tolkningar utifrån en fenomenografisk ansats. Bedömningen har varit att forskningsfrågan: *Hur beskriver lärarna, som undervisar i matematik i grundskolans årskurser 1-3, sin undervisning om fenomenet differens/skillnad?* är besvarad då en direkt beskrivning av informanternas uttalanden om sin undervisning om fenomenet differens/skillnad har återgetts. Angående forskningsfrågan: *Hur uppfattar lärarna, som undervisar i matematik i grundskolans årskurser 1-3, fenomenet differens/skillnad* har resultatet bedömts visa möjliga uppfattningar av informanterna av fenomenet differens/skillnad.

# Referenser

- Alexandersson, M. (1994). Den fenomenografiska forskningsansatsens fokus. I B. Starrin, & P-G. Svensson, (Red.). (1994). *Kvalitativ metod och vetenskapsteori*. (s. 111-136). Lund: Studentlitteratur.
- Altiparmak, K., & Özdoan, E. (2010). A study on the teaching of the concept of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(1), 31-47.
- Ball, D. L. (1993). With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary School Mathematics. *Elementary School Journal*, 93(4), 373-397.
- Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching. Who Knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How can We Decide? *American Educator; Fall 2005*, 29(3), 14-46.
- Bentley, C., & P.-O. (2011). *Det beror på hur man räknar*. Stockholm: Liber.
- Bentley, P.-O. (2008). *Mathematics Teachers and Their Conceptual Models. A New Field of Research*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Bruno, A., & Martínón, A. (1999). The teaching of Numerical Extensions: a Case of Negative Numbers. *International Journal of Mathematic Education in Science and Technology*, 30(6), 789-809.
- Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder (2:a upplagan)* (B. Nilsson övers.). Stockholm: Liber. (Original publicerat 2002).
- Dahlgren, L.-O., & Johansson, K. (2015). Fenomenografi. I A. Fejes, & R. Thornberg, (Red.). (2015). *Handbok i kvalitativ analys* (s. 162-175) (2:a upplagan). Stockholm: Liber.
- Eriksson, I. (1999). *Lärares pedagogiska handlingar: En studie av lärares uppfattningar av att vara pedagogisk i klassrumsarbetet*. Uppsala studies in Education, 82. Uppsala: Acta Universitatis Upsaliensis.
- Fejes, A., & Thornberg, R. (2015). *Handbok i kvalitativ analys (2:a upplagan)*. (Red.). (2015). Stockholm: Liber.
- Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws, (Ed.). (1992). *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 243-275). New York: Macmillan.
- Gustavsson, B. (2002). *Vad är kunskap? En diskussion om praktisk och teoretisk kunskap* (Forskning i fokus, 5). Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.



- Johansson, B. (2011). *Varför är subtraktion så svårt?* Uppsala: Kunskapsföretaget.
- Karlsson, N., & Kilborn, W. (2014). *Grundläggande algebra, funktioner, sannolikhetslära och statistik. Matematikdidaktik för lärare*. Lund: Studentlitteratur.
- Kilhamn, C. (2011). *Making Sense of Negative Numbers*. Göteborgs universitet: Institutionen för didaktik och pedagogisk profession. (Avhandling)
- Kilhamn, C. (2014). *Tallinjen som ett didaktiskt redskap*. Nämnaren 2014:2. Göteborgs universitet: NCM.
- Kinard, J. T. Sr., & Kozulin, A. (2008). *Undervisning för fördjupat matematiskt tänkande* (I. Lindelöf övers.). Lund: Studentlitteratur. (Original publicerat 2008).
- Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Göteborg: Nationell Centrum för Matematikutbildning, NCM.
- Kvale, S., & Brinkmann, S. (2014). *Den kvalitativa forskningsintervjun* (3:e upplagan) (S.-E. Torhell övers.). Lund: Studentlitteratur. (Original publicerat 2014).
- Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned. Professional insights gained and shared by teachers of mathematics*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Larsson, K. (2010). *Vad handlar subtraktion om?* Stockholms universitet: Institutionen för matematikämnet och naturvetenskapsämnenas didaktik. (Examensarbete).
- Larsson, S. (1986). *Kvalitativ analys – exemplet fenomenografi*. Sedan 2010-09-01 fritt tillgänglig på <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:253401/FULLTEXT01.pdf>
- Larsson, S. (1994). Om kvalitetskriterier i kvalitativa studier. I B. Starrin, & P.-G. Svensson (Red.). (1994). *Kvalitativ metod och vetenskapsteori*. (s. 163-189). Lund: Studentlitteratur.
- Lo, M. L. (2012). *Variation Theory and the Improvement of Teaching and Learning*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik. Matematikdidaktik för lärare*. Lund: Studentlitteratur.
- Löwing, M., & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik för skola, hem och samhälle*. Lund: Studentlitteratur.
- Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marton, F. (2015). *Necessary Conditions of Learning*. Oxon & New York: Routledge.

- Marton, F. (1981). Phenomenography – Describing Conceptions of the World around us. *Instructional Science*, 10, 177-200.
- Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and Awareness*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marton, F., & Booth, S. (2000). *Om lärande* (P. Wadensjö övers). Lund: Studentlitteratur. (Original publicerat 1997).
- Marton, F., & Runesson, U. (2015). The idea and practice of learning study. In K. Wood, & S. Sithamparam, (Eds.). (2015). *Realising Learning. Teachers' professional development through lesson and learning study*. (pp. 103-121). Oxon & New York: Routledge.
- Murdiyani, N. M., Zulkardi, Ilma I. P. R., van Eerde, D., & van Galen, F. (2013). Developing a Model to Support Students in Solving Subtraction. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education* 4(1), 95-112.
- Norrby, C. (2014). *Samtalsanalys. Så gör vi när vi pratar med varandra* (3:e upplagan). Lund: Studentlitteratur.
- Olteanu, C., & Olteanu, L. (2012). Improvement of Effective Communication - The Case of Subtraction. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 10(4), 803-826.
- Skolverket. (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.
- Starrin, B., & Renck, B. (1996). Den kvalitativa intervjun. I P.-G. Svensson, & B. Starrin, (Red.). (1996). *Kvalitativa studier i teori och praktik* (s. 52-78). Lund: Studentlitteratur.
- Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap. Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*. New York: Free Press.
- Uljens, M. (1998). Fenomenografi, dess icke-dualistiska ontologi och Menons paradox. Pedagogiska institutionen vid Åbo Akademi. *Pedagogisk forskning i Sverige* 1998. 3(2), 122-129.
- Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Föreläsning:

Löwing, M. *Förkunskapernas betydelse i matematikundervisningen*. Föreläsning, 20 april, 2015. Norrtälje.

Länkar:

Bennet, C., Fredriksson, M., Frisk, S., & Löwing, M. Diagnosmaterielet Diamant. Stockholm. Skolverket. Diagnosen AG 1 hämtades den 29 april 2015 på länken:

[http://www.skolverket.se/polopoly\\_fs/1.193718!/Menu/article/attachment/1\\_Aritmetik.pdf](http://www.skolverket.se/polopoly_fs/1.193718!/Menu/article/attachment/1_Aritmetik.pdf)

Frisk, S. (2009). *Subtraktion i läromedel för årskurs 2*. Artikel i Nämnaren 3, 2009.

[http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/1015\\_09\\_3.pdf](http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/1015_09_3.pdf)

Modenius, C., Prestor, S., & Tanner, A. (2012). *Två av subtraktionens aspekter – Jämföra och ta bort*. Learning Study genomförd i Norrtälje kommun.

[http://ls.idpp.gu.se/sites/ls.idpp.gu.se/files/learn\\_subtraktion\\_1\\_121101.pdf](http://ls.idpp.gu.se/sites/ls.idpp.gu.se/files/learn_subtraktion_1_121101.pdf)

Vetenskapsrådets forskningsetiska principer hämtades den 23 januari 2015 på länken:

<http://www.codex.vr.se/texts/HSFR.pdf>

# Bilagor

## Bilaga 1

Jane Tuominen

X-ort den 4 mars 2015

Hej!

Jag går just nu en kurs på Stockholms universitet på min fritid och behöver göra intervjuer som ska hjälpa mig i min studie där jag ska undersöka lärares uppfattningar inom subtraktionsområdet. Skulle det vara ok för din del att jag mejlar någon eller några av dina lärare och frågar om de kan tänka sig att delta i en intervju? Jag bifogar det missivbrev (eventuella justeringar kan tillkomma) som kommer att skickas till de lärare jag kan ställa frågan till om att delta i intervjuer. Utifrån undersökningens forskningsfrågor och syften är urvalet: lärare som undervisar grundskolans elever i årskurserna 1-3 och har någon utbildning i matematik för nämnda årskurser.

Ställer du dig positiv till att jag frågar någon eller några av dina lärare?

Kan det vara ok att intervjuerna sker på arbetstid för berörda lärare? Jag kommer att göra intervjuerna på min fritid.

Vilka lärare arbetar på din skola/enhet som kan stämna med det urval lärare jag behöver för min undersökning?

Både X och Y ställer sig positiva till att jag ställer frågan till dig som rektor samt att göra intervjuer med lärare.

Med hopp om ett positivt svar

Vänligen

Jane Tuominen

## Bilaga 2

Jane Tuominen

X-ort den 27 februari 2015

### Intervjuer för mina studier

Hej!

Jag heter Jane Tuominen och arbetar som skolutvecklare i X kommun. För tillfället studerar jag på min fritid på Stockholms universitet. Jag går en fristående kurs, *Självständigt arbete i didaktik – 15 hp*, under våren 2015. I mitt arbete skall jag göra en mindre undersökning och jag har valt att göra en studie där jag skall undersöka lärares uppfattningar inom subtraktionsområdet. Jag ämnar göra åtta intervjuer och min fråga till Dig är om Du kan tänka Dig att medverka i en sådan intervju.

Intervjun beräknas ta cirka 20 minuter. Urvalet har skett utifrån att jag söker lärare som har någon utbildning för och erfarenhet av att undervisa i matematik i grundskolans årskurser 1-3. Lärare som jag har nära relation med är bortvalda av etiska skäl enligt regler och riktlinjer för forskning.

Intervjun kommer att dokumenteras med hjälp av ljudupptagning. Eventuellt kan filminspelning komma att användas i syfte om Du önskar visa och förklara något genom att rita/skriva något. Filmkameran riktas då enbart till det som ritas/skrivs. Ljud- och/eller filminspelning kommer inte att presenteras i annat sammanhang utan enbart vara ett underlag för min uppsats. Ljud- och/eller filminspelning kommer att förvaras under min studietid så att obehöriga ej äger tillträde till materialet. Efter avslutad studie och godkänd uppsats kommer ljud- och/eller filminspelning att makuleras. Ljudupptagningen kommer att transkriberas och ligga till grund, tillsammans med intervjun, för resultatet i min uppsats. All personliga data behandlas konfidentiellt, vilket innebär att det i uppsatsen inte framgår vilka lärare som har intervjuats eller vilka skolor intervjupersonerna arbetar på.

Jag har tagit del av de etiska regler och riktlinjer för forskning som finns på [Codex](#) (Vetenskapsrådet, 2002) och det är utifrån dessa regler och riktlinjer jag tar hänsyn till Din anonymitet. De lärare som deltar i denna studie och intervjuer kommer i uppsatsen att benämnas som *Lärare 1*, *Lärare 2* etcetera. Resultatet av studien kan inte generaliseras då det är en liten studie. Trots det är det min förhoppning är att få syn på något intressant som eventuellt skulle kunna ligga till grund för ytterligare forskning och eventuellt komma andra lärare tillgodo. Min ambition är att Du kommer att kunna ta del av uppsatsens innehåll vid höstterminens start 2015.

Jag är mycket tacksam om Du kan tänka Dig att delta i studien. Om Du samtycker (observera att det är frivilligt att delta) till att delta i en intervju erhåller Du ett mejl där vi kommer överens om lämplig tid och plats för intervjun.

Vänligen fyll i svarstalongen nedan och mejla mig **senast fredag den 20 mars** scannat till mejladress [jane.tuominen@x.se](mailto:jane.tuominen@x.se) eller som internpost till Jane Tuominen, Barn- och utbildningskontoret, X kommun då jag fått detta arbete godkänt av min chef och verksamhetschefen för grundskolan. Har du funderingar kring intervjun är du välkommen att mejla mig med dina frågor eller synpunkter. Med hopp om Ditt deltagande – vänliga hälsningar! Jane Tuominen

Jag samtycker till att delta i en intervju med ljudupptagning och eventuell filminspelning för dina studier inom subtraktionsområdet.

Jag samtycker även att intervjun får ligga till grund för din uppsats.

Jag samtycker inte till att delta i en intervju med ljudupptagning och eventuellt filminspelning för dina studier inom subtraktionsområdet.

---

Ort och datum

---

Namnteckning

---

Namnförtydligande

### **Bilaga 3**

Hej X och Y!<sup>22</sup>

Tack för Ert samarbete att möjliggöra en intervju för min studie!

Jag har nu bokat in en intervju med Dig, X, xdag den X mars klockan XX:00 – XX:00, utifrån Dina förslag i Doodle.

För att intervjuerna ska störa Er verksamhet så lite som möjligt är det bra om en del detaljer är förberedda.

Jag är tacksam om Ni har bokat ett rum på Er skola där vi kan sitta utan att bli störda. Jag har med en skylt att sätta på dörren där det framgår att vi behöver sitta ostört då ljudupptagning sker. Då jag ska transkribera intervjuerna får det inte vara några störande ljud i bakgrunden. Det behöver finnas ett bord och stolar till Dig och mig.

Jag har med den tekniska utrustning som krävs, men det behöver finnas eluttag för två devicer (dator och eventuellt filmkamera).

Var möts vi den aktuella dagen och tidpunkten?

Vänligen

Jane Tuominen

---

<sup>22</sup> X är informanten och Y är berörd rektor.

## Bilaga 4

### Intervjuguide

Vilken utbildning i matematik har du i din lärarutbildning?

Har du kompletterat med någon ytterligare utbildning i matematik efter det?

Hur många år har du undervisat i matematik?

Vilka årskurser har du undervisat i matematik?

Antal år?

Vilka årskurser har du huvudsakligen undervisat i matematik?

Antal år?

När introducerar du subtraktion?

Hur introducerar du subtraktion med dina elever?

Vad behöver elever kunna för att kunna subtraktion?

Vilka uppgifter väljer du vid introduktionen?

Hur kommunicerar du med eleverna om dessa uppgifter?

Vilket materiel använder du i undervisningen?

Hur arbetar du med materielelet?

Vilka problem stöter du på i undervisningen med subtraktion?

Hur hanterar du dessa problem?

Uppgiften  $8 - 5 =$  visas.

(Jag läser inte uppgiften i syfte att inte leda in informanten på något spår.)

Hur läser du denna uppgift för elever?

Hur benämner du det som ska vara här för elever? (Pekar på platsen för "lösningen".)

Hur brukar du undervisa elever i årskurserna 1-3 vid uppgifter som  $8 - 5 =$ ?

Hur introducerar du en sådan uppgift?

(Laborativt materiel, tallinje eller andra metaforer m.m.?)

Vad behöver elever kunna för att kunna lösa den här uppgiften?  $8 - 5 =$ ?

Vilka missuppfattningar finns?

Vad behöver urskiljas (kritiska aspekter)?

Sedan visas uppgiften  $5 - 8 =$

Undervisar du dina elever om uppgifter som denna?

Hur läser du denna uppgift för elever?

Vad tänker du ska vara här? (Pekar på platsen för "lösningen".)



Vad kallar du "lösningen"?

Hur skulle du undervisa elever vid uppgifter som  $5 - 8 = ?$

Vad behöver elever kunna för att kunna lösa den här uppgiften?

Vilka missuppfattningar finns?

Vad behöver urskiljas (kritiska aspekter)?

Vad är det för likheter/skillnader på  $8 - 5$  och  $5 - 8$ ?

Hur måste vi undervisa för att elever inte ska få "lösningen" 3?

(Vad behöver elever kunna för att ej få 3?)

Elever som har "lösningen" 3 på uppgiften  $5 - 8 =$  Hur kan de ha tänkt?

Hur vet elever åt vilket håll de ska gå?

Eventuellt:

Om läraren säger differens eller skillnad – vad menar du med differens/skillnad? Kan du visa eller förklara det på något sätt? Hur får eleverna syn på "differensen"/"skillnaden"? Vad menar du att differens/skillnad innebär?

Om du använder tallinjen eller termometern – hur löser du då uppgiften  $5 - (-8) = ?$

Brukar du använda andra hjälpmedel/metaforer?

Stockholms universitet/Stockholm University  
SE-106 91 Stockholm  
Telefon/Phone: 08 – 16 20 00  
[www.su.se](http://www.su.se)



**Stockholms  
universitet**