

Positivt om negativa tal

RUC Uppsala 10 mars 2014

Dokumentation: pedagogdirekt.se



Syfte

- Tillgängliggöra forskning och beprövad erfarenhet
- Pröva och ompröva egna och andras metoder och modeller



Innehåll

- Historik & definitioner
- Cecilia Kilhamn
- Ingvar O Persson
- Learning Study-erfarenheter



Hur möjliggör du för eleverna att förstå...

$$3 - 5 = \quad \quad 3 - (-5) =$$



Begrepp

-3 (-3) -3

”Minustecken”

- Subtraktionstecken
- Signum för negativa tal

Negativ tre
subtraherat
med negativ
tre

$$(-3) - (-3) =$$

minuend – subtrahend = differens



Fler begrepp

- Kardinaltal
- Ordinaltal
- Ordningstal

8 56



Ännu fler begrepp:

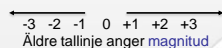
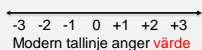
Tal utan tecken: endast en storlek, värde och magnitud smälter samman.



Tal med tecken har två storlekar:

- Värde (knutet till ordning)
- Magnitud (absolutbelopp, mängd)

Är skulden större om jag har -7 eller -5?



KILHAMN
KILHAMN

Historik

$$\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} =$$



Elevers svårigheter liknar historiska problem. Bättre kunskap om matematikhistoria!

KILHAMN
KILHAMN

Hur kan elever lära...

$$3 - 5 =$$

$$3 - (-5) =$$



KILHAMN
KILHAMN

Utför alla subtraktioner med samma modell

- $12 - 6 =$
- $12 - (-6) =$
- $(-12) - 6 =$
- $(-12) - (-6) =$
- $6 - 12 =$
- $6 - (-12) =$
- $(-6) - 12 =$
- $(-6) - (-12) =$

KILHAMN
KILHAMN

Cecilia Kilhamn

Making sense of negative numbers

- Doktorerade 2011, GU
- Följt en klass från åk 6 till åk 9
- Utveckling i taluppfattning när talområdet omfattar både positiva och negativa tal
- Metaforer
- Språk



KILHAMN
KILHAMN

Begreppsförvirring?

$$-3 \quad (-3) \quad -3$$

Hur pedagogen och läroboken använder språket och olika metaforer i matematikundervisningen avgör hur elever utvecklar sin taluppfattning.

KILHAMN
KILHAMN

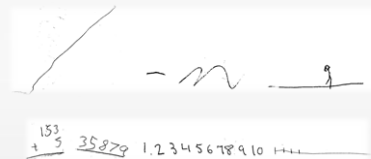
Taluppfattning

Inför mötet med negativa tal:

- kunna se 0 som ett tal (inte enbart en representation av ingenting)
- förstå hur subtraktion fungerar
- kunna hantera tallinjen



"Tallinje" elever åk 6:



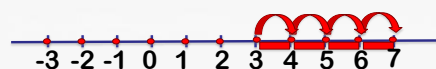
Uppgifter i läroboken



Endast en aspekt av tal: tal som platser.
Om begreppet "tallinje" inte lyfts i klassrummet blir det inte ett tillgängligt mentalt redskap.



Tallinjen



Pinnarna och mellanrummen
Platser, sträckor, rörelser



Skillnad på tallinjen en sträcka

- Vad är skillnaden?
- Hur långt är det mellan talen i uppgiften?

$$5 - (-2) = 7$$

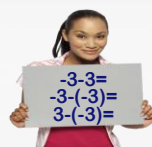


Om minuenden < subtrahenden?

$$2 - 5 = -3$$

$$(-2) - 5 = -7$$

Ingen berättar!



$$(-3) - (-8) = \underline{\quad}$$

"Ovilja att acceptera negativa tal hör ihop med vår önskan att konkretisera det abstrakta."



Kontomodellen:

Ingående saldo:	+200	Ingående saldo:	+200
present	+500	present	+500
köpa tröja	-800	köpa tröja	-800
vinst	+300	köpte lott	-100
Utgående saldo:	+200	Utgående saldo:	-200

$$(+200) - (-800) = (+1000)$$

$$(+200) + (+800) = (+1000)$$

$$(-200) - (-800) = (+600)$$

$$(-200) + (+800) = (+600)$$

Alltså: $-(-800)$ och $+800$
ger samma värdeförändring

Alltså: $x - (-800) = x + 800$
oavsett x : $-(-800) = +800$
oavsett belopp: $-(-y) = +y$

Regel:
Subtraktion av ett tal ger
samma värde som en
addition av den motsatta



Subtraktion som uppräknung från delen

Subtraktion ses som en addition med en obekant.

$$100 - 97 = x \text{ ses som additionen } 97 + x = 100$$

$$7 - 4 = \underline{\quad} \quad 4 + \underline{\quad} = 7 \quad +3$$

$$3 - (-2) = \underline{\quad} \quad (-2) + \underline{\quad} = 3 \quad +5$$

$$(-9) - (-5) = \underline{\quad} \quad (-5) + \underline{\quad} = (-9) \quad -4$$



Subtraktion som lika tillägg

- Lika tillägg: $380 - 199$

Lägg till 1 på varje term: $(380+1) - (199+1) = 381 - 200 = 181$

- Lika tillägg: $(-3) - (-8)$

Lägg till 8 på varje term: $(-3+8) - (-8+8) = 5 - 0 = 5$

- Lika tillägg: $(-8) - (-3)$

Lägg till 3 på varje term: $(-8+3) - (-3+3) = -5 - 0 = (-5)$

Regel: Vi kan lösa subtraktion genom att tillämpa lika
tillägg och göra subtrahenden till "0".



Kilhamns 7 goda råd...

1. Problematisera elevens taluppfattning
2. Arbeta medvetet med tallinjen – tidigt!
3. Klargör skillnaden mellan ett tals magnitud (absolutbelopp) och dess värde
4. Använd begreppen negativt tal och positivt tal – subtrahera istället för att minusa / ta minus
5. Säg inte "minus minus blir plus" utan troliggör i stället att motsatt operation med motsatt tal ger samma värde
6. När du ger eleven en metafor eller tankemodell, var då också tydlig med vilka begränsningar den har
7. Våga ta steget in i matematikens värld – tala om tal som egna objekt med egna egenskaper



Ingvar O Persson, modell 1



Värde 1



Värde (-1)



De kan illustrera motsatta tal
tillsammans har de värdet "noll"
 $1 + (-1) = 0$



Värde 3



Värde (-3)

3 och (-3) har tillsammans värdet "noll" $3 + (-3) = 0$



$$3 + 2 =$$



lägg ihop:



ger summan 5




$(-5) + 3 =$

lägg ihop

kuberna i rutan har värdet $(-3) + 3 = 0$


Summan är (-2)



$(-2) + (-3) =$


lägg ihop

Summan är (-5)



$(-5) - (-3) =$

Differensen är (-2)




$2 - 5 =$

"addera noll"

$+3 + (-3) = 0$

De adderade föremålen har värdet $3 + (-3) = 0$
 Nu kan vi subtrahera 5
 Värdet av återstoden visar sig vara (-3)




$(-2) - (-5) =$

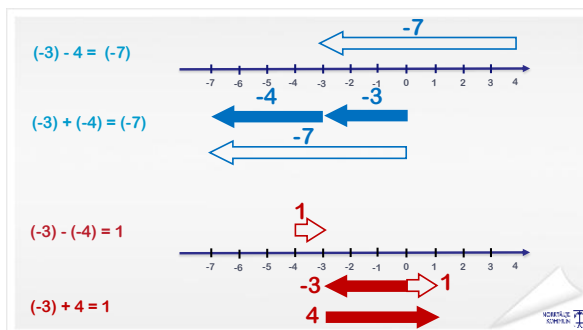
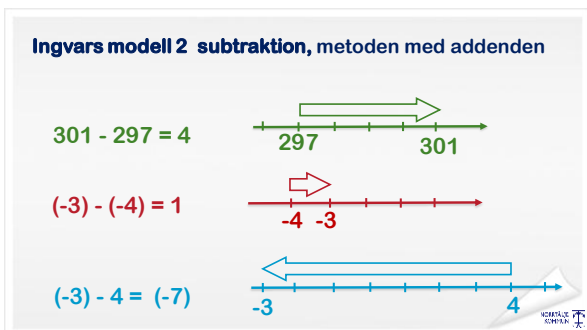
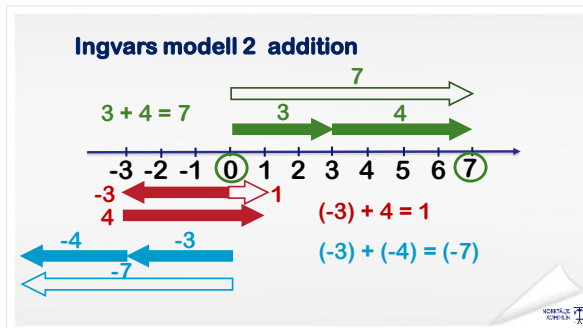
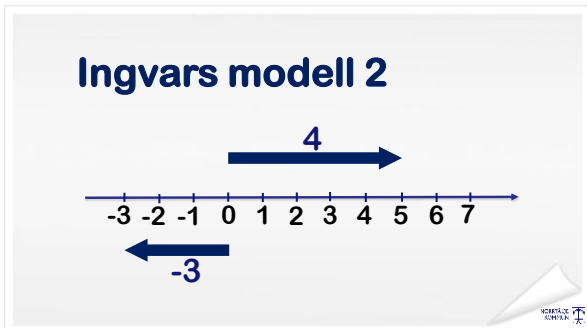
"addera noll"

De adderade föremålen har värdet $(-3) + 3 = 0$
 Nu kan vi subtrahera talet (-5)
 Värdet av återstoden visar sig vara 3



$5 - (-2) = 7$





Dagens modeller

- Kontomodellen
- Subtraktion som uppräknig av delen $7 - 4 = _ : 4 + _ = 7$
- Subtraktion som lika tillägg $(-3) - (-8) = 5 - 0 =$
- Ingvar O P modell 1
- Ingvar O P modell 2

Länkar

Cecilia Kilhamn
[Making sense of negative numbers](#)

Ingvar O Persson

- Del 1: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/2527_07_2.pdf
- Del 2: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/4447_07_3.pdf

Tack!

Charlotta Andersson
charlotta.andersson@norttalje.se
0739 62 32 52

Jane Tuominen
jane.tuominen@norttalje.se
0739 62 32 50

NORTTALJE